

梁灿彬 周彬 《微分几何入门与广义相对论》
Differential Geometry & General Relativity.



Cybertron Yhs

上册

第一章 拓扑空间简介 Chapter 1 Introduction to Topological Spaces

§1.1 集论初步 The ABCs of Set Theory

· 元素 (element) 集合 (set) $x \in X$ 空集 (empty set) $\emptyset$

表示集合方法: 列出所有元素 / 指出元素特性.

Def 1 子集 (subset) $A \subset X$ 相等集合 $X \subset Y$ 且 $Y \subset X \Rightarrow X = Y$

真子集 (proper subset) $A \subsetneq X$

Def 2 并集 (union) $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

交集 (intersection) $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

差集 (difference) $A - B := \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$.

补集 (complement) $-A = X - A$.

Claim 1-1-1 交换律 $A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$.

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

De Morgan 律 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

Pf: 等号两边相互包含, 即一边集合中的元素属于另一边集合.

· 卡氏积 (Cartesian product)

Def 3 非空集合 X, Y 的卡氏积是一个有序对集合 $X \times Y := \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$

例 1: $X = Y = \mathbb{R}^1$ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ 有 n 个自然坐标

· 距离 (distance)

Def 4 $\mathbb{R}^n$ 的任意两个元素 $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ 之间的距离

$$|y - x| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y^i - x^i)^2}$$

· 映射 (map)

Def 5 X, Y 为非空集合 映射 $f: X \rightarrow Y$ 为一个法则, 给 X 中的指定 x 的唯一对应元素

$y = f(x)$ y 为 x 在映射 f 下的像 (image) x 为 y 的原像 (inverse image)

X 为映射 f 的定义域 (domain)

X 的全体元素在映射 f 下的像的集合 $f[X]$ 为映射 $f: X \rightarrow Y$ 的值域 (range)

相等映射 $f: X \rightarrow Y, f': X \rightarrow Y \quad \forall x \in X, f(x) = f'(x)$

例 2: $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射为一个 n -元函数 / $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射给出 m 个 n -元函数

Def 6 映射 $f: X \rightarrow Y$ 为一一的 (one-to-one) 任一 $y \in Y$ 有不多于一个逆像 (≤ 1)

单射 (injection)

映射 $f: X \rightarrow Y$ 为到的 (onto) 任一 $y \in Y$ 都有逆像 (≥ 1)

满射 (surjection)

$f: X \rightarrow Y$ 对于 $B \subset Y$ 在 f 下的逆像为 $f^{-1}[B] := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$

= 双射 (bijection)

Def 7 $f: X \rightarrow Y$ 为常值映射: $\forall x, x' \in X, f(x) = f(x')$

Def 8 $f: X \rightarrow Y$ 与 $g: Y \rightarrow Z$ 为映射 则 f 和 g 的复合映射 $g \circ f: X \rightarrow Z$

$(g \circ f)(x) := g[f(x)] \in Z \quad \forall x \in X$

· $\mathbb{R}$ 中任两元素的距离概念 $\Rightarrow$ 一元函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的连续性 [ε - δ 定义]

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t. 当 $|x' - x| < \delta$ 时有 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, 则 f 在 x 上连续. f 在 $\mathbb{R}$ 上连续

$\Leftrightarrow$ $\{$ 中任一开区间的逆像都是 X 的开区间之并, 则 $f: X \rightarrow Y$ 连续. [开区间之并定义]

$\mathbb{R}$ 中开集的本质抽象性质 (a) $\mathbb{R}$ 和 $\emptyset$ 都是开集 (b) 有限个开集之交仍是开集 (c) 任意个开集之并仍是开集

$\Rightarrow$ 从 $\mathbb{R}$ 中抽象至任意集合 X .

§1.2 拓扑空间 Topological Space.

• $\mathbb{R} \rightarrow X$ 开集的集合为一个拓扑, 给集合 X 附加了拓扑结构, 令其成为拓扑空间.

Def 1 非空集合 X 作为全集, 幂集 $\mathcal{P}$ 中选取一个子集 $\mathcal{T}$ 作为 X 的拓扑 (topology) [族].

满足 (a) $\emptyset \in \mathcal{T}, X \in \mathcal{T}$

(b) 若 $O_i \in \mathcal{T}, i=1, 2, \dots, n$, 则 $\bigcap_{i=1}^n O_i \in \mathcal{T}$

(c) 若 $O_\alpha \in \mathcal{T}, \forall \alpha$, 则 $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathcal{T}$

Def 2 指定了拓扑 $\mathcal{T}$ 的集合 X 称为拓扑空间 (topological space)

拓扑空间 X 中的子集 $O \in \mathcal{T}$ 则 O 为 X 中的开集 (open set)

例 1: $\mathcal{T}$ 为 X 的全部子集的集合 (X 的幂集) $\mathcal{T} = \mathcal{P}$ 则 $\mathcal{T}$ 为离散拓扑 (discrete topology) 元素最多

例 2: $\mathcal{T}$ 仅包含 $X, \emptyset$ $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ 则 $\mathcal{T}$ 为凝聚拓扑 (indiscrete topology) 元素最少

例 3: $X = \mathbb{R}^n$ 开球 (open ball) $B_0(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < r\}$. $n=1$ 开球 = 开区间 $n=2$ 开球 = 开圆盘

$\mathcal{T}_u = \{\text{空集} \emptyset \text{ 或 } \mathbb{R}^n \text{ 中能表为开球之并的子集}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的通常拓扑 (usual topology)

一般无声明时 拓扑空间为 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_u)$.

例 4: 拓扑空间 $(X_1, \mathcal{T}_1), (X_2, \mathcal{T}_2)$ $X = X_1 \times X_2$ 有限个拓扑空间同理, 如 $\mathbb{R}^n$.

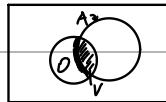
$\mathcal{T} := \{O \subset X \mid O \text{ 可表示为 } O_1 \times O_2 \text{ 的交集之并, } O_1 \in \mathcal{T}_1, O_2 \in \mathcal{T}_2\}$ 为 X 的积拓扑

例 5: 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ A 为 X 的非空子集并确定拓扑 $\mathcal{Y}$

$\mathcal{Y} := \{V \subset A \mid \exists O \in \mathcal{T} \text{ 使 } V = A \cap O\}$ 为 A 的, 由 $\mathcal{T}$ 给出的诱导拓扑 (induced topology).

$(A, \mathcal{Y})$ 为 $(X, \mathcal{T})$ 的拓扑子空间 (topological space).

$X = \mathbb{R}^2$



• 拓扑空间之间的映射的连续性.

Def 3a 设 $(X, \mathcal{T})$ 与 $(Y, \mathcal{Y})$ 为拓扑空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 为连续的 (continuous):

若 $\forall O \in \mathcal{Y}$ 满足 $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}$

Def 3b 设 $(X, \mathcal{T})$ 与 $(Y, \mathcal{Y})$ 为拓扑空间, 映射 $f: X \rightarrow Y$ 在点 $x \in X$ 处连续:

$\forall$ 满足 $f(x) \in G'$ 的 $G' \in \mathcal{Y}$ $\exists G \in \mathcal{T}$ 使 $x \in G$ 且 $f[G] \subset G'$

若 f 在所有 $x \in X$ 处连续, 则 $f: X \rightarrow Y$ 为连续的

例如 $X=Y=\mathbb{R}$, $\mathcal{T}=\mathcal{Y}=\mathcal{T}_u$ 拓扑空间映射的连续性定义 $\Rightarrow \mathbb{R}$ 上的函数连续性 ε - δ 定义

• 拓扑空间上的同胚映射.

Def 4 拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 与 $(Y, \mathcal{Y})$ 之间存在一个映射 $f: X \rightarrow Y$

满足 (a) f 是一一映射的 (有且仅有一个原像) (b) f 及 f^{-1} 都连续

则称 f 为从 $(X, \mathcal{T})$ 到 $(Y, \mathcal{Y})$ 的同胚映射 (homeomorphism).

且 $(X, \mathcal{T})$ 与 $(Y, \mathcal{Y})$ 互相同胚 (homeomorphic to each other).

C^r 代表 r 阶导函数存在且连续.

C^∞ 代表任意阶导函数存在且连续, 即光滑 (smooth)

$\Rightarrow f: X \rightarrow Y$ 是 C^0 if $0 \in \mathcal{Y} \Rightarrow f^{-1}[0] \in \mathcal{T}$ $C^r (r>0)$ 性质不能推广至拓扑空间映射上, 其最高要求为同胚性质.

同胚映射在 X 的开子集与 Y 的开子集建立一一对应的联系 (性质联系) $\Rightarrow X, Y$ 互相同胚, 即 X, Y 在拓扑上等价

例 6: 任一开区间 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚.

例 7: 挖去一点的圆周 $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚 S^1 与 $\mathbb{R}^2$ 不同胚 [紧致性原因].

例 8: $\mathbb{R}^2$ 上的圆周与带有圆周附上的 $\mathcal{T}_u$ 给出的诱导拓扑 $(S^1, \mathcal{Y}_{S^1})$ 与 $(E, \mathcal{Y}_E)$ 同胚.

$\Rightarrow$ 应用: 复杂电路/复杂网络 “网络拓扑学”.

• 邻域 (neighborhood).

Def 5 $\exists O \in \mathcal{T}$ 使得 $x \in O \subset N$ 则 $N \subset X$ 称为 $x \in X$ 的一个邻域, 自身是开集的邻域是开邻域

Claim 1-2-1 $A \subset X$ 是开集当且仅当 $\forall x \in A, A$ 是 x 的邻域

• 闭集 (closed set)

Def 6 $\neg O \in \mathcal{T}$ 则 $C \subset X$ 为闭集.

Claim 1-2-2 闭集性质 (a) X 及 $\emptyset$ 是闭集 (b) 有限个闭集的交集是闭集 (c) 任意个闭集的并集是闭集

任何拓扑空间 $(X, \mathcal{T})$ 都有两个即开又闭的子集: $X, \emptyset$

· 连通性 (connected)

Def 7 若拓扑空间 (X, τ) 除 X 和 $\emptyset$ 外没有既开又闭的子集, 则 (X, τ) 是连通的

例 9: A 与 B 是 $\mathbb{R}$ 上的开区间 $A \cap B = \emptyset$ 取 $X = A \cup B$ 且以 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑 $\tau_{\mathbb{R}}$ 诱导了

则 A, B 既开又闭 (X, τ) 不连通.

· 闭包 $\bar{A}$ (closure) 为最小闭集 Def 8 内部 $i(A)$ (interior) 为最大开集 Def 9 边界 $\partial A := \bar{A} - i(A)$ (boundary) Def 10

· 开覆盖 (open cover).

Def 11 X 的开子集的集合 $\{O_\alpha\}$ 满足 $A \subset \bigcup O_\alpha$ (O_α 覆盖 A) 则 $\{O_\alpha\}$ 为 $A \subset X$ 的一个开覆盖.

§1.3 紧性 Compactness.

Def 1 设 $\{O_\alpha\}$ 是 $A \subset X$ 的开覆盖, 若 $\{O_\alpha\}$ 中有限元素构成的子集 $\{O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_n}\}$ 也覆盖 A $\bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i} \supset A$
则 $\{O_\alpha\}$ 有有限子覆盖 (finite subcover).

Def 2 若 $A \subset X$ 的任一开覆盖都有有限子覆盖, 则 A 是紧致的 (compact)

Def 3 若拓扑空间 (X, τ) 中 $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists O_1, O_2 \in \tau$ 使 $x \in O_1, y \in O_2$ 且 $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
则 (X, τ) 称为 T_2 空间或豪斯多夫空间 (Hausdorff space)

Claim 若 (X, τ) 为 T_2 空间, $A \subset X$ 为紧致, 则 A 为闭集

若 (X, τ) 为紧致, $A \subset X$ 为闭集, 则 A 为紧致.

$A \subset \mathbb{R}^n$ 为紧致 当且仅当 A 为有界闭集.

Def 4 有界 (bounded) $\exists$ 开球 $B \subset \mathbb{R}^n$ s.t. $A \subset B$

Def 5 在同胚映射下保持不变的性质为拓扑性质 (topological property) 或拓扑不变性 (topological invariance)

紧致性, 连通性, T_2 性都是拓扑性质.

$\{O_1, \dots, O_n\} \subset \tau$

Def 6 拓扑空间 (X, τ) 称为第二可数的 (second countable), 若 τ 存在可数子集 $\{O_1, \dots, O_k\} \subset \tau$
使得任一 $O \in \tau$ 可被表为 $\{O_1, \dots, O_k\}$ 或 $\{O_1, \dots\}$ 的元素之并

第二章 流形和张量场

Chapter 2 Manifolds and Tensor Fields

§2.1 微分流形 Differentiable Manifolds

Topological Space [Topological Structure] + [Differentiable Structure] $\Rightarrow$ Manifolds locally looks like $\mathbb{R}^n$

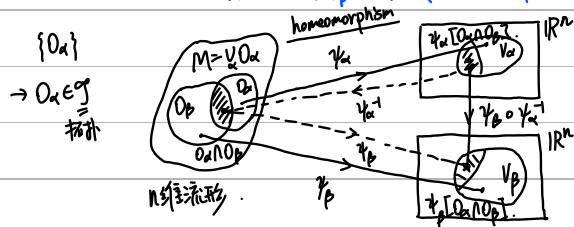
Def 1 拓扑空间 M 称为 n 维微分流形 (n -dimensional differentiable manifold).

若 M 有开覆盖 $\{O_\alpha\}$, 即 $M = \bigcup O_\alpha$ 满足

(1) 对每一个 O_α , $\exists$ 同胚 $\gamma_\alpha: O_\alpha \rightarrow V_\alpha$ (V_α 为 $\mathbb{R}^n$ 中用通常拓扑衡量的开子集) homeo 局部类似于 $\mathbb{R}^n$

(2) 若 $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, 则复合映射 $\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1}$ 是 C^∞ (光滑的)

相容性条件 (compatibility)



$$V_\alpha \in \mathcal{J}_u \quad V_\beta \in \mathcal{J}_u$$

通常拓扑

(连续空间)

光滑流形: M 是 Hausdorff 的和第二可数的

Note: ① $\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1}: \gamma_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \gamma_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset \mathbb{R}^n$ 相容性条件要求这 n 个实函数都是 C^∞

② $p \in O_\alpha \rightarrow \gamma_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$ 有 n 个自然坐标, 即 p 点在映射 γ_α 下获得的坐标 (同胚映射指定坐标)

$(O_\alpha, \gamma_\alpha)$ 构成一个局部坐标系 (coordinate system) O_α 为坐标域 (coordinate patch)

$\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1}$ 定义坐标变换 (coordinate transformation) $x'' = \phi(x', \dots, x^n), \dots, x^n = \phi(x', \dots, x^n)$

Def 2 坐标系 $(O_\alpha, \gamma_\alpha)$ 称为图 (chart)

满足同胚性与相容性条件的全体图的集合 $\{(O_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ 称为图册 (atlas).

一个图册中的任意两个图相容.

例 1: $M = (\mathbb{R}^n, \mathcal{J}_u)$ $O_1 = \mathbb{R}^n$ $\gamma_1 =$ 恒等映射 $\Rightarrow$ 只有一个图的图册 $\{(O_1, \gamma_1)\}$

$\Rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 n 维流形 平凡流形 (trivial): 能用一个坐标域覆盖的流形.

① 自然坐标: $p \in \mathbb{R}^n$ 在 γ_1 下获得的坐标

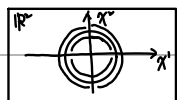
② 其他坐标: 选择与 (O_1, γ_1) 相容的另一个图 (O_2, γ_2) $p \in \mathbb{R}^n$ 在 γ_2 下获得的坐标 (极坐标域不覆盖 $\mathbb{R}^n$ 全体点)

例2: $M = (S^2, \gamma)$ $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ 是三维空间中的单位球面.

γ 是 $\mathbb{R}^3$ 的 γ_u 在 S^2 上诱导的拓扑

例3: $M = (S^1, \gamma)$ $S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ 是二维空间中的单位圆周

γ 是 $\mathbb{R}^2$ 的 γ_u 在 S^1 上诱导的拓扑



开半圆 $O_i^+ = \{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^i > 0\}$ $O_i^- = \{(x^1, x^2) \in S^1 \mid x^i < 0\}$ $i=1, 2$

$\{O_i^\pm\}$ 为 S^1 的一个开覆盖 (4个开集)

$$\gamma_i^\pm(x^1, x^2) = x^i$$

x^1, x^2 为 $\mathbb{R}^2$ 上的自然坐标. 同胚映射 $\gamma_i^\pm: O_i^\pm \rightarrow \mathbb{R}$ 的开区间 $(-1, 1)$ 是投影映射 $\gamma_i^\pm(x^1, x^2) = x^i$

$\Rightarrow (S^1, \gamma)$ 是一个一维流形

同理: 六个开半球 + 投影映射 $\gamma_i: O_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ 上的开圆盘 $\Rightarrow (S^2, \gamma)$ 是一个二维流形.

拓扑结构与微分结构.

且在 $O_\alpha \cap O_\beta'$ 上 γ_α 与 γ_β' 不满足 (b)

拓扑空间 M
 $\begin{cases} \text{+ 图册 } \{(O_\alpha, \gamma_\alpha)\} \rightarrow \text{微分流形} \\ \text{+ 图册 } \{(O_\beta', \gamma_\beta')\} \rightarrow \text{微分流形} \end{cases}$

① 图册不相容 $\exists O_\alpha, O_\beta' \text{ s.t. } O_\alpha \cap O_\beta' \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ 两个图册代表两种不同的微分结构. 拓扑结构相同

拓扑结构由选取的拓扑 γ 决定.

② 图册相容 $\rightarrow$ 同一个微分流形 (默认取最大图册)

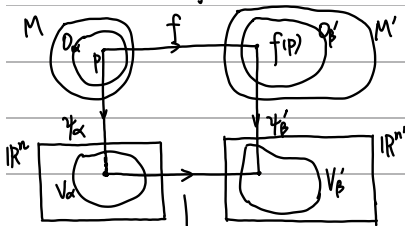
进行任意坐标变换 $\gamma_\beta \circ \gamma_\alpha^{-1}$

微分流形之间的映射 连续(拓扑结构) / 可微(微分结构) $\Rightarrow C^\infty$

流形 M (n -dim) M' (n' -dim) 图册分别为 $\{(O_\alpha, \gamma_\alpha)\}, \{(O_\beta', \gamma_\beta')\}$.

M, M' 之间的映射 $f: M \rightarrow M'$

考虑其连续与可微性质 (C^r) $\rightarrow$ 考虑 $\gamma_\beta' \circ f \circ \gamma_\alpha^{-1}$



$\forall p \in M$ 任取 $(O_\alpha, \gamma_\alpha)$ s.t. $p \in O_\alpha$ $V_\alpha \equiv \gamma_\alpha[O_\alpha]$

任取 $(O_\beta', \gamma_\beta')$ s.t. $f(p) \in O_\beta'$ $V_\beta' \equiv \gamma_\beta'[O_\beta']$

$\gamma_\beta' \circ f \circ \gamma_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ 为 n 个 n' 元函数.

$$\gamma_\beta' \circ f \circ \gamma_\alpha^{-1}$$

$\gamma_\beta' \circ f \circ \gamma_\alpha^{-1}$ 的 C^r 性可用于定义 $f: M \rightarrow M'$ 的 C^r 性.

Q: 为何 n 个 n 元函数的 C 性是一致的.

Def 3. $f: M \rightarrow M'$ 称为 C 类映射 若 $\forall p \in M$, 映射 $\varphi_p \circ f \circ \varphi_p^{-1}$ 对应的 n 个 n 元函数是 C 类的.

Def 4. 微分流形 M 和 M' 之间存在一个映射 $f: M \rightarrow M'$

满足 (a) f 是一到上的 (b) f 及 f^{-1} 是 C^∞ 的

则称 f 为从 M 到 M' 的微分同胚映射 (diffeomorphism)

且 M 和 M' 互相微分同胚 (diffeomorphic to each other)

Note: ① 微分同胚是对流形间映射的最高要求 互相微分同胚的流形在微分流形层面上等价

② 两流形互相微分同胚的必要条件是维数相等.

流形 M 局部像 $\mathbb{R}^n$

③ Def 1 对拓扑空间 M 和 $\mathbb{R}^n$ 映射 $\varphi: O_M \rightarrow V_M$ 是同胚, 把 O_M 和 V_M 看作微分流形 φ 是微分同胚

• $M' = \mathbb{R}$ 时的映射.

Def 5 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 M 上的函数 (function on M) 或 M 上的量场 (scalar field on M).

若 f 为 C^∞ 的, 则称为 M 上的光滑函数. M 上全体光滑函数集为 $\mathcal{F}_M$

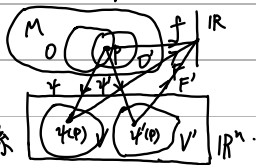
[绝对的] $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ $\begin{cases} \{x^i\} \\ \{x'^i\} \end{cases}$ $\begin{cases} (0, \varphi) \\ (0', \varphi') \end{cases}$ $\begin{cases} n \text{元函数 } F = f \circ \varphi^{-1} = F(x^1, \dots, x^n) = f(x) & F: \mathbb{R}^n \rightarrow M \rightarrow \mathbb{R}. \\ n \text{元函数 } F' = f \circ \varphi'^{-1} = F'(x^1, \dots, x^n) = f'(x) & F': \mathbb{R}^n \rightarrow M \rightarrow \mathbb{R}. \end{cases}$

[相对的, 不同].

f 为 M 上的函数.

$f(x)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 元函数—

取决于坐标域 O_M 和 φ_M 构成的坐标



M, N 为流形, 维数分别为 m 和 n , 则 $M \times N$ 也是流形, 维数为 $m+n$ $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$

例 4: $\mathbb{R}^3$ 中 q 点的点电荷电势是流形 $M \equiv \mathbb{R}^3 - \{e\}$ 上的光滑函数.

坐标由 $(0, \varphi)$ 给出, 坐标处的电势由 $F = f \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 给出.

S2.2 切矢和切矢场 Tangent Vector and Tangent Vector Fields

2.2.1 切矢量

· 线性空间 (向量空间).

Def1 实数域上的一个向量空间 (vector space) 是一个集合 V 配以两个映射

(a) 加法 (addition) $V \times V \rightarrow V$ (b) 数乘 (scalar multiplication) $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$

且满足 $\forall V, V_1, V_2 \in V, \forall \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{1} V_1 + V_2 = V_2 + V_1$$

$$\textcircled{2} (V_1 + V_2) + V_3 = V_1 + (V_2 + V_3)$$

$$\textcircled{3} \exists \text{零元 } \underline{0} \text{ 使 } \underline{0} + V = V$$

$$\textcircled{4} \alpha_1(\alpha_2 V) = (\alpha_1 \alpha_2) V$$

$$\textcircled{5} (\alpha_1 + \alpha_2) V = \alpha_1 V + \alpha_2 V$$

$$\textcircled{6} \alpha(V_1 + V_2) = \alpha V_1 + \alpha V_2$$

$$\textcircled{7} 1 \cdot V = V \quad 0 \cdot V = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \exists u \in V \text{ 使 } u + V = \underline{0} \text{ 约定 } u = -V$$

向量空间中的任意元素称为向量 (vector)

例如 三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ V_p 是从 p 出发的各种方向和长度的直线段的集合.

加法: 平行四边形法则 | 数乘: 长度伸缩. $\Rightarrow V_p$ 为向量空间

推广至任意流形 M . $\forall p \in M$ 定义 n 个向量使它们的集合构成 p 点的向量空间.

$\rightarrow$ 本质性质: $\vec{v}: f \mapsto$ 实数 [任 C^∞ 函数 f 沿 $\vec{v}$ 求方向导数得实数] + 线性性 + 莱布尼茨律.

Def2 映射 $V: \mathcal{F}_M \rightarrow \mathbb{R}$ 称为点 $p \in M$ 的个量 (vector) $\mathcal{F}_M$ 是流形 M 上全体光滑函数的集合.

若 $f, g \in \mathcal{F}_M, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 有

$$(a) \text{线性性 } V(\alpha f + \beta g) = \alpha V(f) + \beta V(g)$$

$$(b) \text{莱布尼茨律 } V(fg) = f|_p V(g) + g|_p V(f). \text{ 其中 } f|_p \text{ 代表函数 } f \text{ 在 } p \text{ 点的值 } f(p).$$

$$fg \in \mathcal{F}_M \text{ 且 } fg|_p = f|_p \cdot g|_p.$$

Claim 2-2-1 设 $f, f_2 \in \mathcal{F}_M$ 在点 $p \in M$ 的某邻域 N 内相等, 即 $f|_N = f_2|_N$, 则对 p 点任一个量 V 有 $V(f) = V(f_2)$

· 坐标基矢 (coordinate basis vector) 与坐标分量 (coordinate components)

定义 $p \in M$ 的一个向量 $v \Leftrightarrow$ 指定一个从 $\mathcal{F}_M$ 到 $\mathbb{R}$ 的, 满足 (a) (b) 的映射 [向量本质]

指定对应规律 $\rightarrow$ 每个 $f \in \mathcal{F}_M$ 对应一个确定的实数 [一点处有无限多向量]

设坐标 $(0, \psi)$ 中的坐标为 $\{x^\mu\}$ 定义 O 中任一点处的 n 个向量 $v = X_\mu \quad \mu=1 \cdots n$.

* M 上的光滑函数 $f \in \mathcal{F}_M +$ 映射 $\psi(\psi^{-1}) \Rightarrow n$ 元函数 $F(x^1, \dots, x^n) = f \circ \psi^{-1}$.

X_μ 作用在任 $f \in \mathcal{F}_M \quad X_\mu(f) := \frac{\partial F(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \Big|_{(x^1(p), x^2(p), \dots, x^n(p))}$

记为 $X_\mu(f) := \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \Big|_p \quad \forall f \in \mathcal{F}_M$.

Claim 2-2-2 以 V_p 代表 M 中 p 点所有向量的集合, 则 V_p 是 n 维向量空间, 即 $\dim V_p = \dim M = n$

Pf: V_p 满足向量空间定义 Def 1.

加法 $(u+v)(f) := u(f) + v(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}_M \quad u, v \in V_p$

数乘 $(\alpha v)(f) := \alpha v(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}_M \quad v \in V_p \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

零元 $0 \in V_p$ 满足 $0(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}_M$

任选坐标 $(0, \psi)$ s.t. $p \in O \quad X_\mu(f) = \frac{\partial F(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^\mu} \Big|_p$ 定义了 p 点的 n 个向量 $X_\mu \quad \mu=1 \cdots n$

① 证明线性独立 设 n 个实数 $\alpha^\mu (\mu=1 \cdots n)$ s.t. $\alpha^\mu X_\mu = 0$

向量相等 $\Rightarrow$ 作用于同光滑函数得到的实数相等.

两边同时作用于 x^ν

坐标 x^ν 为坐标域上的函数 $n^{\text{th}} M \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\alpha^\nu = \alpha^\mu \delta_\mu^\nu = \alpha^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_p = \alpha^\mu X_\mu(x^\nu) = 0(x^\nu) = 0 \Rightarrow \alpha^\nu = 0 \quad \nu=1, \dots, n$$

x^ν 即为光滑函数 x^ν 与坐标系中 $\psi(\psi^{-1})$ 复合得到的 n 元函数.

由此 $\alpha^\mu X_\mu = 0$ 当且仅当 $\alpha^\mu = 0 \quad X_1 \cdots X_n$ 线性独立 $\dim V_p \geq n$.

② 证明 $\forall v \in V_p$ 有 $v = v^\mu X_\mu$ 其中 $v^\mu = v(x^\mu)$. [Wald 1984 P.6]

即 V_p 的任元素都可用 n 个 X_μ 线性表示, 表示系数是以 v 作用于 x^μ 所得的实数.

$\{X_1 \cdots X_n\}$ 是 V_p 的一个基底 $\Rightarrow \dim V_p = n$.

Def 3 坐标域内任一点的 $\{X_1 \cdots X_n\}$ 称为 V_p 的一个坐标基底 (coordinate basis)

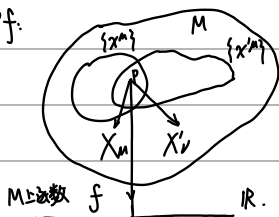
每一个 X_μ 称为一个坐标基矢, $v \in V_p$ 用 $\{X_\mu\}$ 线性表示的系数 v^μ 称为 v 的坐标分量.

Claim 2-2-3 设 $\{x^\mu\}$ 和 $\{x'^\mu\}$ 为两个坐标系, 其坐标域的交集非空 p 为交集内的一点 $v \in V_p$.

$\{v^\mu\}$ 和 $\{v'^\mu\}$ 为 v 在两个系中的坐标分量

则坐标分量之间的变换关系为 $v'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \Big|_p v^\alpha$

Pf.



$$X_\mu(f) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} \Big|_p \quad X'_\nu(f) = \frac{\partial f(x')}{\partial x'^\nu} \Big|_p$$

标量场 f 在 q 点的值 $f|_q = f[x(q)] = f'[x'(q)]$.

坐标变换 $x'^\mu = x'^\mu(x^1, \dots, x^n)$ 标量场 f 同坐标复合后的 n 元函数

由此 $f(x) = f'(x') = f'(x'(x))$. e.g. $f'(x^1(x^1, x^2), x^2(x^1, x^2))$

$$X_\mu(f) = \frac{\partial f'(x')}{\partial x^\mu} \Big|_p = \left(\frac{\partial f'(x')}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \right) \Big|_p = \underbrace{\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_p}_{\text{实数}} \cdot \underbrace{X'_\nu(f)}_{\text{向量}}$$

$$\Rightarrow X_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_p X'_\nu$$

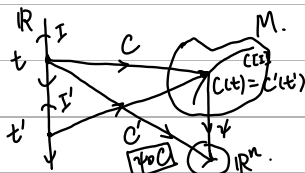
且向量 $v = v^\mu X_\mu = v'^\mu X'_\mu$ 则 $v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_p X'_\nu = v'^\nu X'_\nu$

因 $\{X'_\nu\}$ 中 n 个基矢彼此线性独立 $\Rightarrow v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_p v^\mu$.

· 曲线及其切矢.

Def 4. 设 I 为 $\mathbb{R}$ 的一个区间, 则 C^1 类映射 $C: I \rightarrow M$ 称为 M 上一条 C^1 类的曲线 (curve)

$\forall t \in I$, 有唯一点 $C(t) \in M$ 与之对应 t 称为曲线的参数 (parameter).



Note: 1) 映射 C 和 C' 是不同曲线 (映射不同)

2) 同一曲线的两种参数化 [C' 为 C 的重参数化 (reparameterization)]

若 ψ 到上映射 $\alpha: I \rightarrow I'$ 满足 (a) $C = C' \circ \alpha$ (b) $t = \alpha(t')$ 有非零的导数

$$C(t) = C'(\alpha(t)) = C'(t')$$

1) 坐标系 $(0, t)$ $C[I] \subset C \Rightarrow \psi \circ C$ 是从 I 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射

$$\Rightarrow C[I] = C'[I']$$

$$\Leftrightarrow n \text{ 个一元函数 } x^\mu = x^\mu(t) \quad \mu = 1 \cdots n$$

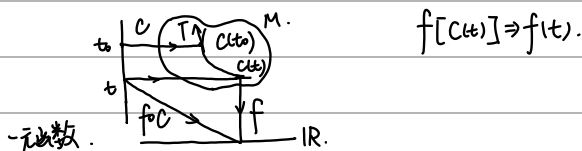
曲线的参数方程 (参数表达式)

Def 5 设 (O, ψ) 为坐标系, x^a 为坐标, 则 O 的邻域 $\{p \in O \mid x^a(p) = \text{常数}, \forall a\}$ 为以 x^a 为参数的一条曲线(像), 称为 x^a 坐标线 (coordinate line)

· 曲线的切矢

Def 6 设 $C(t)$ 是流形 M 上的 C^1 曲线, 则线上 $C(t_0)$ 点的切于 $C(t)$ 的切矢量 (tangent vector) T 是 $C(t_0)$ 点的矢量, 它对 $f \in \mathcal{F}_M$ 的作用定义为 $T(f) := \left. \frac{d(f \circ C)}{dt} \right|_{t_0} = \left. \frac{d[f(C(t))]}{dt} \right|_{t_0} \quad \forall f \in \mathcal{F}_M$

切矢 $T = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t_0}$

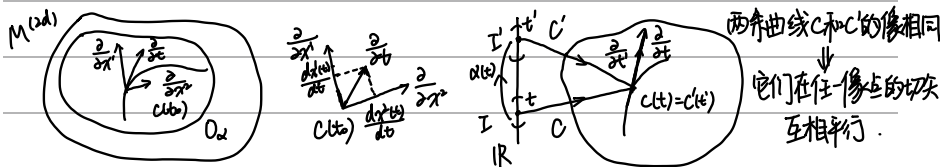


例 1: x^i 坐标线是以 x^i 为参数的曲线 ($x^2 \dots x^n$ 常数值不同, 对应不同 x^i 坐标线)

$X_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p$ 坐标基矢. = 过 p 点的 x^a 坐标线的切矢 $\frac{\partial}{\partial x^a} \Big|_p (f) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^a} \Big|_p \quad \forall f \in \mathcal{F}_M$

Claim 2-2-4 设曲线 $C(t)$ 在某坐标系中的参数式为 $x^a = x^a(t)$, 则线上任一点的切矢量 $\frac{\partial}{\partial t}$

在该坐标基底的展开式为 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^a(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^a}$ 即切矢的坐标分量是参数式 $x^a(t)$ 对 t 的导数.



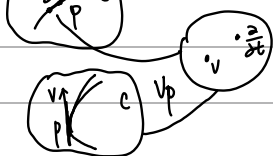
Def 7. 非零矢量 $u, v \in V_p$ 称为互相平行的 (parallel), 若 $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ s.t. $v = \alpha u$

Claim 2-2-5 设曲线 $C': I' \rightarrow M$ 是 $C: I \rightarrow M$ 的重参数化 $[C(t) = C'(\alpha(t))]$

则两者在任一点的切矢 $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t'}$ 关系为 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d\alpha(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial t'}$ $t'(t): I \rightarrow I'$

$t'(t)$ 是由映射 $\alpha: I \rightarrow I'$ 诱导的一元函数.

M $\forall p \in M \quad p = C(t_0)$ 切矢 $\frac{\partial}{\partial t}$ 是 p 上矢量空间 V_p 中的一个元素.



V_p 中任一元素(矢量 v)都可视为作为过 p 的某曲线的切矢
 $\Rightarrow p$ 的矢量一切矢量 (tangent vector)
 V_p — 切空间 (tangent space)

2.2.2 流形上的向量场.

Def 8 设 A 为 M 的子集. 若给 A 中每点指定一个向量, 则能得到一个定义在 A 上的向量场 (vector field).

例 2: 非自相交曲线 $C(t)$ 的每点的切矢构成了 $C(t) \subset M$ 的一个向量场

设 V 是 M 上的向量场 $V|_P$ 是 P 点的向量场 $\left. \begin{array}{l} V(t) \text{ 为 } M \text{ 上的一个函数.} \\ f \text{ 是 } M \text{ 上的函数 (标量场)} \quad f \in \mathcal{F}_M. \end{array} \right\} \begin{array}{l} V_P(f), V_Q(f) \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \text{向量场 } V \text{ 可以.} \\ \text{将函数 } f \text{ 映射至函数 } V(f) \end{array}$

Def 9 M 上的向量场 V 称为 C^∞ 类的 (光滑的) / C^r 类的

若 V 作用在 C^∞ 类的函数上结果为 C^∞ 类函数 / C^r 类的. $V(f) \in \mathcal{F}_M \quad f \in \mathcal{F}_M$.

Claim 2-2-6 M 上的向量场 V 是 C^∞ 类的 (C^r 类的)

$\Leftrightarrow V$ 在任一坐标基底的向量 V^μ 为 C^∞ 类 (C^r 类) 函数

Def 10 两个光滑向量场 u, v 的对易子 (commutator) 是一个光滑向量场 $[u, v]$

$$[u, v](f) := u(v(f)) - v(u(f)) \quad \forall f \in \mathcal{F}_M.$$

Note: $[u, v]$ 对易子为 M 上的向量场

定义在 $V_P \in M$ 上作为 P 点的矢量 (从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}$ 的映射) $[u, v]|_P(f) := u|_P(v(f)) - v|_P(u(f))$

Claim 2-2-7 设 $\{x^\mu\}$ 为坐标, 则坐标基矢 (坐标基上的向量场) 对易子 $[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}] = 0 \quad \mu, \nu = 1 \dots n$

$$[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}](f) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\frac{\partial}{\partial x^\nu}(f)) - \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(f)) = 0 \quad \text{任一坐标系的任意两个基矢场对易}$$

· 积分曲线

Def 11 曲线 $C(t)$ 为向量场 V 的积分曲线 (integral curve), 若曲线上每点切矢都等于该点 V 值.

Claim 2-2-8. 设 V 是 M 上的光滑向量场, 则 M 的任一点 P 必有 V 的唯一积分曲线经过 (满足 $C(0)=P$)

Pf: 任取一坐标 $\{x^\mu\}$, 坐标域含 P 待求积分曲线的参数表达式 $x^\mu = x^\mu(t)$

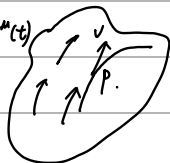
$$\text{切矢量 } V = \frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{坐标基矢.}$$

$$\Rightarrow \frac{dx^\mu(t)}{dt} = V^\mu(x(t) \dots x^n(t))$$

n 个 ($\mu=1, \dots, n$) - 阶常微分方程组 $\xrightarrow[\text{给定初条件 } x^\mu(0)=x^\mu|_P]{\text{存在唯一解}} x'(t) \dots x^n(t).$

n 个函数确定积分曲线且与所选坐标无关.

Q.E.D



2.2.3 群与对称性.

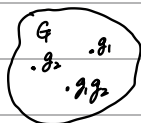
Def 12 一个群 (group) 是一个集合 G 配以满足以下条件的映射 $G \times G \rightarrow G$ (群乘法, 元素间乘法为 $g_1 g_2$)

1a) $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G.$

1b) $\exists$ 恒等元 (identity element) $e \in G$ s.t. $eg = ge = g \quad \forall g \in G.$

1c) $\forall g \in G, \exists$ 逆元 (inverse element) $g^{-1} \in G$ s.t. $gg^{-1} = g^{-1}g = e$

对称性: 若某对象在某变换下不变, 即是它具有该变换下的对称性.



例如 带电面上的一个动点 沿 x (或 y) 轴平移 (translate) $x \mapsto x+a \quad y \mapsto y \quad z \mapsto z$

动点的电荷面密度 σ 在平移时不变 $\Rightarrow \sigma$ 具有 x (或 y) 轴平移对称性 $\sigma(x+a, y, z) = \sigma(x, y, z)$

设沿 x 轴平移 a ($\forall a \in \mathbb{R}$) 的变换表示为 $\phi_a: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, 是 $\mathbb{R}^3$ 上的微分同胚

$G = \{\phi_a \mid \forall a \in \mathbb{R}\}$ 为沿 x 轴所有平移的集合 $\xrightarrow{\text{群乘法}}$ 群 a 为参数.

群乘法为 $\phi_a \phi_b := \phi_{a+b} \quad \forall \phi_a, \phi_b \in G$ (恒等元为 ϕ_0 , 逆元为 ϕ_{-a})

$\Rightarrow G$ 为 $\mathbb{R}^3$ 上的单参微分同胚群.

设 M 是流形, $\mathbb{R} \times M$ 是比 M 高维的流形 (乘积流形) (1+1 维)

设 $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 将 $t \in \mathbb{R}$ 和 $p \in M$ 变为 $\phi(t, p) \in M$.

$$\phi(\cdot, \cdot) \begin{cases} \phi(t, \cdot) \equiv \phi_t: M \rightarrow M. \\ \phi(\cdot, p) \equiv \phi_p: \mathbb{R} \rightarrow M. \end{cases}$$

Def 13 C^∞ 映射 $\phi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ 称为 M 上的一个单参微分同胚群 (one-parameter group of diffeomorphisms)

若 1a) $\phi_t: M \rightarrow M$ 是微分同胚 $\quad \forall t \in \mathbb{R}.$

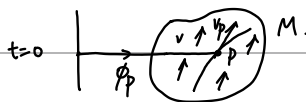
$\{\phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}.$

1b) $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t} \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$ 群乘法为映射的复合.

Claim 2-29 单参微分同胚群 $\phi \xleftrightarrow{\text{locally}} C^\infty$ vector field v

Pf: $\forall p \in M, \phi_p: \mathbb{R} \rightarrow M$ 是过 p 点的一条光滑曲线

1) $\phi_0 = \phi(0, p) \equiv \phi_0(p) = p$ 恒等元.



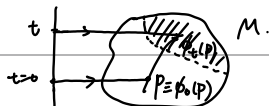
Q: 所有的光滑曲线是否都能由切矢定义向量场

ϕ_p 是单参数分同胚群过 p 点的轨道 (orbit), 它在点 $\phi(0)$ 处的切矢为 $V|_p \Rightarrow M$ 上的光滑向量场

(2) V 是 M 上的光滑向量场

$\phi_t: M \rightarrow M$ 为微分同胚映射 $\phi_t(p)$ 在过 $p = \phi_0(p)$ 点的积分曲线上且 $\phi_t(p)$ 与 $\phi_0(p)$ 相差参数值为 t .

Note: 参数 t 取某些值时积分曲线像点不存在 [内部群].

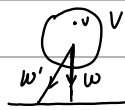


§2-3 对偶向量场 Dual Vector Field.

Def 1. 设 V 有 $\mathbb{R}$ 上的有限维向量空间, 线性映射 $\omega: V \rightarrow \mathbb{R}$ 称为 V 上的对偶向量 (dual vector)

V 上全体对偶向量的集合称为 V 的对偶空间, 记作 V^*

$$\omega(\alpha v + \beta u) = \alpha \omega(v) + \beta \omega(u) \quad \forall u, v \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$



Claim 2-3-1 V^* 是向量空间且 $\dim V^* = \dim V$

Pf: V^* 上的加法 $(\omega_1 + \omega_2)(v) := \omega_1(v) + \omega_2(v) \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in V^*, v \in V$

数乘 $(\alpha \omega)(v) := \alpha \cdot \omega(v) \quad \forall \omega \in V^*, v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow V^* \text{ 是向量空间}$

零元 $0(v) := 0 \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

设 $\{e_\mu\}$ 为 V 的一组基矢, 定义 V^* 中 n 个特殊元素 $e^1 \dots e^n$ [对偶基矢].

使得 $e^{\mu\nu}(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad \mu, \nu = 1, \dots, n. \quad e^{\mu\nu}$ 对基矢作用 + 线性 $\Rightarrow e^{\mu\nu}$ 对 V 中任基矢作用

下述 $\{e^{\mu\nu}\}$ 是 V^* 的一组基矢 (1) $e^1 \dots e^n$ 彼此线性独立. [对偶向量等式证明: 作用基矢 e_ν]

(2) $\forall \omega \in V^*$, 令 $\omega_\mu = \omega(e_\mu) \quad \mu = 1, \dots, n$ 则 $\omega = \omega_\mu e^{\mu\nu}$

$\Rightarrow V^*$ 中任元素可用 $\{e^{\mu\nu}\}$ 线性表出, 故 $\{e^{\mu\nu}\}$ 是 V^* 的一个基底

$\{e^{\mu\nu}\}$ 是 $\{e_\mu\}$ 的对偶基底 由此 $\dim V^* = \dim V$

Review: 拓扑空间-同胚 流形-微分同胚 向量空间-同构 群-群同构

两个向量空间是同构的 (isomorphic), 若两者间存在一一对应的线性映射 (同构映射)

两个向量空间同构 $\Leftrightarrow$ 维数相同.

V 与 V^* 是同构的: 同构映射可以由 $e_\alpha \mapsto e^{\alpha*}$ 定义的线性映射. [e_α 选择任意 $\Rightarrow$ 同构改变]



• 基底变换.

Claim 2-3-2 若向量空间 V 中有一基底变换 $e'_\alpha = A^\nu_\alpha e_\nu$, 以 A^ν_α 为元素排成的非退化矩阵记作 A 则相应的对偶基底变换为 $e'^{\alpha*} = (\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu e^{\nu*}$ 其中 $\tilde{A}^{-1}$ 是矩阵转置的逆.

Pf: 两边同作用于基底 e_α

$$(\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu e^{\nu*}(e_\alpha) = (\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu e^{\nu*}(A^\beta_\alpha e_\beta)$$

$$= A^\beta_\alpha (\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu e^{\nu*}(e_\beta) = A^\beta_\alpha (\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu = \tilde{A}^\nu_\alpha (\tilde{A}^{-1})^\alpha_\nu = \delta^\nu_\alpha = e'^{\nu*}(e'_\alpha)$$

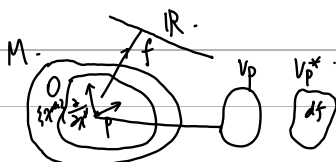
矩阵运算 - 指标左右重要 转置: 左右交换.

• 对偶向量场与对偶坐标基底.

若在 M 上 ($A \subset M$) 上每点指定一个对偶向量

即得到 $M(A)$ 上的一个对偶向量场

M 上的对偶向量场 ω 是光滑的, 若 $\omega(v) \in \mathfrak{g}_M$ 对 V 光滑向量场.



对偶向量场举例: $f \in \mathfrak{g}_M$ 则 f 可以自然地诱导出 M 上的一个对偶向量场 df (微分).

定义 $df \mapsto$ 定义对偶向量 $df|_p \in V_p^* \rightarrow$ 给出 $df|_p(v) \in \mathbb{R}, \forall v \in V_p$.

$$df|_p(v) := v(f) \quad \text{且} \quad d(fg)|_p = f|_p(dg)|_p + g|_p(df)|_p.$$

设坐标为 $(0, \psi)$. 第 α 个坐标 $x^\alpha \in \mathfrak{g}_0$ (0 上的光滑函数) $\Rightarrow dx^\alpha$ 是定义在 0 上的对偶向量场

$p \in 0$

$\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 V_p 的第 i 个坐标基矢 $\Rightarrow p$ 点有 $dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial}{\partial x^i} (x^i) = \delta^i_i$

对偶坐标基底 $\{dx^i\}$ 坐标基底 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$.

dx^i 是 O 上第 i 个对偶坐标基矢场 $\{dx^i\}$ 是 O 上的一个对偶坐标基矢场

O 上任一矢量场 V 可借坐标基底 $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$ 展开 $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 其中 $V^i = V(x^i)$ 为 V 在该系的坐标分量.

O 上任一对偶矢量场 ω 可借对偶坐标基底 $\{dx^i\}$ 展开 $\omega = \omega_i dx^i$ 其中 $\omega_i = \omega \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ 为 ω 在该系的坐标分量 (对偶)

Claim 2-3-3 设 (O, ψ) 是坐标系, f 是 O 上的光滑函数, n 元函数 $f(x^1, \dots, x^n) = f \circ \psi^{-1} = f(x)$

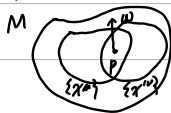
df 可用对偶坐标基底 $\{dx^i\}$ 展开 $df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} dx^i \quad \forall f \in \mathcal{F}_O$

Pf: 两边作用于任一坐标基矢 $\frac{\partial}{\partial x^i}$ 相等.

Claim 2-3-4 设坐标系 $\{x^i\}$ 和 $\{x'^i\}$ 的坐标域有交, 则交域中任一点 p 的对偶矢量 ω 在两坐标系中的

分量 ω_i 和 ω'_i 变换关系为 $\omega'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^i} \Big|_p \omega_i$.

$$\omega = \omega_i dx^i = \omega'_i dx'^i$$



§2.4 张量场 Tensor Field.

Def 1 向量空间 V 的一个 (k, l) 型张量 (tensor of type (k, l)) 是一个多重线性映射: $T = \overbrace{V^* \times V^* \times \dots \times V^*}^{k \text{ 个}} \times \overbrace{V \times \dots \times V}^{l \text{ 个}} \rightarrow \mathbb{R}$

输入 k 个对偶矢量和 l 个矢量产生一个实数.

a multilinear map.

例 1: $1) V$ 上的对偶矢量是 V 上的 $(0, 1)$ 型张量 $v \in V \quad \omega \in V^* \quad \omega: V \rightarrow \mathbb{R} \quad \omega(v) \in \mathbb{R}$

$2) V$ 的元素 v 可看作 V 上的 $(1, 0)$ 型张量 $v \in V^*: V^* \rightarrow \mathbb{R} \quad v(\omega) \in \mathbb{R}$.

$\mathcal{T}_V(k, l)$ 表示 V 上全体 (k, l) 型张量的集合 $V = \mathcal{T}_V(1, 0) \quad V^* = \mathcal{T}_V(0, 1)$.

设 $T \in \mathcal{T}_V(1, 1) \quad T: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \omega \in V^*, v \in V \quad T(\omega, v) \in \mathbb{R}$.

① $T(\omega, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$ 是 V 上的对偶矢量

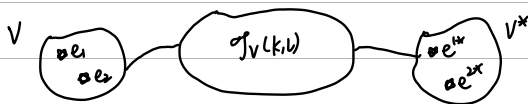
$$T: V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow$ 给定 T , 给 $\omega \in V^*$ 得到一个 $T(\omega, \cdot) \in V^*$

$$T: V^* \rightarrow V^*$$

② $\Leftrightarrow$ 给定 T 后, 给一个 $v \in V$ 得到一个 $T(\cdot; v) \in V$ $T: V \rightarrow V$

同一张量看成不同映射的张量面观



· 张量运算—张量积.

Def 2 V 上的 (k, l) 型和 (k', l') 型张量 T 和 T' 的张量积 (tensor product) $T \otimes T'$ 是一个 $(k+k', l+l')$ 型张量

$$T \otimes T'(w^1, \dots, w^k, w^{k+1}, \dots, w^{k+k'}; v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_{l+l'}) := T(w^1, \dots, w^k; v_1, \dots, v_l) T'(w^{k+1}, \dots, w^{k+k'}; v_{l+1}, \dots, v_{l+l'})$$

张量积是否满足交换律: 设 $w \in V^*, v \in V$, 则 $v \otimes w \in \mathcal{T}_V(1, 1)$, $w \otimes v \in \mathcal{T}_V(1, 1)$

$$\forall \mu \in V^*, \nu \in V \text{ 有 } v \otimes w(\mu; \nu) = v(\mu) w(\nu) = w(\nu) v(\mu) = w \otimes v(\mu; \nu)$$

但一般 $v \otimes w \neq w \otimes v$ 例如欧氏空间中的并矢

$$v \otimes v(w^1, w^2) = v(w^1) v(w^2)$$

$$\neq$$

$$v \otimes v(w^1, w^2) = v(w^1) v(w^2)$$

Claim 2-4-1 $\mathcal{T}_V(k, l)$ 是向量空间 $\dim \mathcal{T}_V(k, l) = n^{k+l}$

Pf: 自然定义 $\mathcal{T}_V(k, l)$ 上的加法, 数乘和零元使其满足 7 条规则 $\Rightarrow \mathcal{T}_V(k, l)$ 为向量空间.

取 $n=2, k=2, l=1$ 设 $\{e_1, e_2\}$ 为 V 的一个基底, $\{e^{*1}, e^{*2}\}$ 为其在 V^* 中的对偶基底

证明 $\mathcal{T}_V(2, 1)$ 的基底可以由 8 个元素构成 它们是线性无关的.

$$e_1 \otimes e_1 \otimes e^{*1}, e_1 \otimes e_1 \otimes e^{*2}, e_1 \otimes e_2 \otimes e^{*1}, e_1 \otimes e_2 \otimes e^{*2}$$

$$e_2 \otimes e_1 \otimes e^{*1}, e_2 \otimes e_1 \otimes e^{*2}, e_2 \otimes e_2 \otimes e^{*1}, e_2 \otimes e_2 \otimes e^{*2}$$

$$\forall T \in \mathcal{T}_V(2, 1) \quad T = T^\mu_\sigma e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{*\sigma} \quad \text{其中 } T^\mu_\sigma = T(e^{*\sigma}, e^{*1}, e_\sigma).$$

是张量 T 在基底 $\{e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{*\sigma}\}$ 下的分量.

· 张量运算—缩并

(1, 1) 型张量分量排列矩阵 (T^μ_ν)

张量 T 在任一基底 $\{e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{\nu_1*} \otimes \dots \otimes e^{\nu_l*}\}$ 的分量与基底有关.

$T \in \mathcal{T}_V(1, 1) \quad T: V \rightarrow V$ [线性变换]. 线性变换 T + 坐标基底 $\{e_\mu \otimes e^{\mu*}\} \Rightarrow$ 矩阵分量 T^μ_ν

$$T = T^{\mu}_{\nu} e_{\mu} \otimes e^{\nu} \quad \text{其中 } T^{\mu}_{\nu} \equiv T(e^{\nu} \otimes e_{\mu})$$

$$T' = T'^{\mu}_{\nu} e'_{\mu} \otimes e'^{\nu} \quad \text{其中 } T'^{\mu}_{\nu} \equiv T(e'^{\nu} \otimes e'_{\mu})$$

同一个 T 在任意两个基底的分量对应的两个矩阵 (T^{μ}_{ν}) 和 (T'^{μ}_{ν}) 互为相似矩阵。

$$\begin{aligned} \text{pf: } T'^{\mu}_{\nu} &= T(e'^{\mu}; e'_{\nu}) = T(\tilde{A}^{-1})^{\mu}_{\rho} e^{\rho}; A^{\sigma}_{\nu} e_{\sigma}) = (\tilde{A}^{-1})^{\mu}_{\rho} A^{\sigma}_{\nu} T(e^{\rho}; e_{\sigma}) \\ &= (\tilde{A}^{-1})^{\mu}_{\rho} A^{\sigma}_{\nu} T^{\rho}_{\sigma} = (A^{-1})^{\mu}_{\rho} T^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma}_{\nu} = (A^{-1} T A)^{\mu}_{\nu} \end{aligned}$$

矩阵等式 $T' = A^{-1} T A$ 由此可知 T' 与 T 互为相似矩阵。 A 为坐标基变换矩阵。

矩阵的迹 (Trace) $T^{\mu}_{\mu} = \sum_{\mu=1}^n T^{\mu}_{\mu}$ (1,1) 型张量。

$$\text{由相似变换 } T'^{\mu}_{\mu} = (A^{-1})^{\mu}_{\rho} T^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma}_{\mu} = A^{\sigma}_{\mu} (A^{-1})^{\mu}_{\rho} T^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\mu} T^{\rho}_{\sigma} = T^{\rho}_{\rho}$$

→ 同一 (1,1) 型张量在不同基底下的矩阵有相同的迹。 * 张量的与基底无关的性质

T 的缩并 (contraction) $CT := T^{\mu}_{\mu} = T(e^{\mu}; e_{\mu})$ 。

讨论 (2,1) 型张量 T 的缩并 $T \in \mathcal{T}_V(2,1)$ $T \equiv T(\cdot, \cdot; \cdot)$

$$\text{两种可能的缩并 } \textcircled{1} C_1 T := T(e^{\mu}, \cdot; e_{\mu}) \in V \quad (C_1 T)^{\nu} = T(e^{\mu}, e^{\nu}; e_{\mu}) \equiv T^{\mu\nu}_{\mu}$$

$$\textcircled{2} C_2 T := T(\cdot, e^{\mu}; e_{\mu}) \in V \quad (C_2 T)^{\nu} = T(e^{\nu}, e^{\mu}; e_{\mu}) \equiv T^{\nu\mu}_{\mu}$$

Def 3 $T \in \mathcal{T}_V(k,l)$ 的第 i 个上标 ($i \leq k$) 和第 j 个下标 ($j \leq l$) 的缩并 ($i-j$ contraction) 定义为

$$C_{ij} T := T(\underbrace{\cdot, \dots, e^{\mu}, \dots}_{\text{第 } i \text{ 上槽}}, \underbrace{\cdot, \dots, e_{\mu}, \dots}_{\text{第 } j \text{ 下槽}}) \quad \text{要求对 } \mu \text{ 求和}$$

注: $\textcircled{1} C_i T$ 与基底选择无关。

$\textcircled{2} (k,l)$ 型张量的每一缩并都是 $(k-1, l-1)$ 型张量。

$\textcircled{3}$ 联合使用张量积和缩并运算可以从原有张量得到新张量。

例如 $v \in V, w \in V^*$, 则 $v \otimes w$ 是 (1,1) 型张量 $C(v \otimes w)$ 是 (0,0) 型张量 (标量)。

$$\text{例 } C(v \otimes w) = w_{\mu} v^{\mu} = w(v) = v(w) \quad [\text{作用 = 并积: 先求张量积再缩并}]$$

$$\text{pf: } C(v \otimes w) = v \otimes w(e^{\mu}; e_{\mu}) = \underbrace{v(e^{\mu}) w(e_{\mu})}_{e^{\mu}(v) = e^{\mu}(v^{\mu} e_{\mu}) = v^{\mu} \delta_{\mu}^{\mu} = v^{\mu}}$$

$$e^{\mu}(v) = e^{\mu}(v^{\mu} e_{\mu}) = v^{\mu} \delta_{\mu}^{\mu} = v^{\mu}$$

$$b) C_2^1(T\otimes v) = T(\cdot, v) \quad \forall v \in V, T \in \mathcal{T}_V(1,2).$$

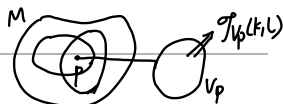
$$c) C_2^2(T\otimes \omega) = T(\cdot, \omega; \cdot) \quad \forall \omega \in V^*, T \in \mathcal{T}_V(2,1).$$

· 张量变换律.

M 中任一点的切空间 V_p 的全体 (k,l) 型张量的集合为 $\mathcal{T}_p(k,l)$

流形上 $\{x^\mu\}$ 包含 $p \Rightarrow$ 特殊基矢: $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ 为 V_p 的坐标基底 $\{dx^\mu\}$ 为 V_p 的对偶坐标基底.

$$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \otimes dx^\sigma \quad \text{其中 } T^{\mu\nu}{}_\sigma = T(dx^\mu, dx^\nu; \frac{\partial}{\partial x^\sigma})$$



Claim 2-4-2 (k,l) 型张量在两个坐标系的分量变换关系 (张量变换律).

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l}$$

$$\text{例如 } T'^{\mu\nu}{}_\sigma = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\alpha\beta}{}_\gamma$$

并且 $\vec{v} \otimes \vec{u} = (2,0)$ 型张量 $v^1 u^1, v^1 u^2, v^1 u^3, v^2 u^1, v^2 u^2, v^2 u^3, v^3 u^1, v^3 u^2, v^3 u^3$

$[\vec{v} \otimes \vec{u}]$ 且不作任何运算 $\vec{v} \otimes \vec{u} \neq \vec{u} \otimes \vec{v}$

9 个数在坐标变换下规律变化

在流形 M (或 $A \subset M$) 上每点指定一个 (k,l) 型张量, 即得到 M (或 A) 上的一个 (k,l) 型张量场

M 上张量场 T 称为光滑的, 若 T 光滑对偶矢量场 $\omega^1, \dots, \omega^k$ 及光滑矢量场 $v_1, \dots, v_l$ 有 $T(\omega^1 \dots \omega^k; v_1 \dots v_l) \in \mathcal{T}_u$.

Q: 弯曲时空度规在正交归一-基底下仍是对角 ± 1 ?

§2.5 度规矢量场 Metric Tensor Field.

Def 1 向量空间 V 的一个度规 (metric) g 是一个对称的、非退化的 $(0,2)$ 型张量.

1) g is symmetric $g(v,u) = g(u,v)$

2) g is nondegenerate $g(v,u) = 0 \quad \forall u \in V \Rightarrow v = 0 \in V$

Note: 若 g 非退化, 则它在 V 的任一-基底 $\{e_\mu\}$ 的分量 $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$ 排成的矩阵非退化 (行列式非零)

若 V 有基底使 g 的分量非退化, 则 g 非退化

III $V + g \Rightarrow (V, g)$

因 内积 $(v,v) \geq 0$ 等号成立当且仅当 $v=0$

度规 $g(v,v)$ 可负且 $g(v,v)=0$ 时不一定 $v=0$ —— $g(v,u)$ 被称为 v 和 u 在度规 g 下的内积.

Def 2 $v \in V$ 的长 (length) 或大小 (magnitude) 定义为 $|v| := \sqrt{g(v,v)}$

$u, v \in V$ 互相正交 (orthogonal) 若 $g(v,u)=0$

V 的基底 $\{e_\mu\}$ 是正交归一的 (orthonormal) 若任一-基矢正交且每-基矢 e_μ 满足 $g(e_\mu, e_\mu) = \pm 1$

Note: 度规 g 在正交归一-基底的分量满足 $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu) = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ \pm 1 & \mu = \nu \end{cases}$

$\Rightarrow$ 度规在正交归一-基底的分量排成的矩阵是对角矩阵且对角元为 $+1$ 或 -1

Claim 2-5-1 任何带度规的向量空间都有正交归一的基底

度规写成对角矩阵时对角元中 $+1$ 和 -1 的个数与所选正交归一-基底无关.

· 度规、向量与空间的分类

Def 3 用正交归一-基底写成对角矩阵

1) 对角元全为 1 的度规 — 正定的 (positive definite) 或黎曼的 (Riemannian)

2) 对角元全为 -1 的度规 — 负定的 (negative definite) 其余度规 — 不定的 (indefinite)

3) 只有一个对角元为 -1 的不定度规 — 洛伦兹的 (Lorentzian)

4) 度规对角元之和 — 号差 (signature) $(-1, +1, +1, +1)$ 号差为 $+2$ $(+1, -1, -1, -1)$ 号差为 -2 .

$$(-1, 1, 1, 1)$$

Def 3 带洛伦兹度规 g 的向量空间 V 的元素可分为三类

① 满足 $g(v, v) > 0$ 的 v - 类空矢量 (spacelike vector)

② 满足 $g(v, v) < 0$ 的 v - 类时矢量 (timelike vector)

③ 满足 $g(v, v) = 0$ 的 v - 类光矢量 (lightlike vector / null vector) 未必 $v = 0$.

度规是 $(0, 2)$ 型张量, 即 $g: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 的双线性映射 $\forall u, v \in V \quad g(v, u) \in \mathbb{R} \Rightarrow g(v, \cdot) \in V^*$

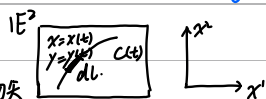
即 $g: V \xrightarrow{\text{线性}} V^*$ 利用度规的非退化性 + 线性 $\Rightarrow g$ 为 $V \rightarrow V^*$ 的同构映射.

无论有无度规 g , V 与 V^* 都是同构的.

Def 5 流形 M 上的对称的, 处处非退化的 $(0, 2)$ 型张量场称为度规张量场 $\Rightarrow (M, g)$

曲线长度定义 ($\mathbb{R}^2$ + Euclidean metric $\Rightarrow \mathbb{R}^2$).

$$dl^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] dt^2 \quad T \text{ 为 } C(t) \text{ 切矢}$$



$$= [(T^1)^2 + (T^2)^2] dt^2 \Rightarrow dl = |T| dt \quad C(t) \text{ 线长 } L = \int |T| dt$$

推广至带有正定度规 g 的任意流形 M 上 $L = \int \sqrt{g(T, T)} dt$.

考虑带有洛伦兹度规 g 的流形 M :

C' 曲线 $C(t)$ 各点的切矢都类空/类时/类光, 则 $C(t)$ 为类空/类时/类光曲线

Def 6 设流形 M 上有洛伦兹度规 g , 则 M 上的类空、类光及类时曲线 $C(t)$ 的线长定义为

$$L = \int \sqrt{|g(T, T)|} dt \quad T \equiv \frac{dx}{dt}$$

注: 1) 类光曲线长度始终为零

2) "不伦不类" (从类时到类空或反转) 的曲线线长没有定义

3) 曲线的线长与其参数化无关 [重参数化不改变线长].

4) 曲线的线长与坐标系无关, 可借助坐标系计算

$$g(T, T) = g\left(T^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = T^\mu T^\nu g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

$T^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$ 曲线切矢的坐标分量等于曲线在该系的参数对参数的导数.

元线长 $dl = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$ $\Rightarrow ds^2 \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ [线元 (line element)] 正负不定

$\Rightarrow$ 线长 $L = \int \sqrt{ds^2}$ 对类空曲线 $ds^2 = (dl)^2$ 度规的坐标分量
 $\sqrt{-ds^2}$ 对类时曲线 $ds^2 = -(dl)^2$

介于 $C(t_0)$ 和 $C(t)$ 之间的曲线段线长 $L(t) = \int_{t_0}^t |T| |t'| dt$ 可以作为曲线的线长参数

$T = T(t)$ 曲线切矢 $|g(T, T)| = 1$ (单位长) 线上任一点 $C(t)$ 切矢的长度

Def 7 设流形 M 上给定度规场 g , 则 (M, g) 叫广义黎曼空间

1) g 为正的, 则 (M, g) 为黎曼空间 (Riemannian space)

2) g 为负定的, 则 (M, g) 为伪黎曼空间 (pseudo-Riemannian space). = 时空 (spacetime).

• 广义黎曼空间的两个例子: 欧氏空间与闵氏空间.

Def 8 设 $\{x^\mu\}$ 是 R^n 的自然坐标, 在 R^n 上定义度规张量场 $\delta = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$

则 (R^n, δ) 称为 n 维欧氏空间 (n -dimensional Euclidean space) δ 称为欧氏度规

Note: ① δ 在自然坐标系的对偶坐标基底 $\{dx^\mu \otimes dx^\nu\}$ 的分量为 $\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases}$

② 线元表达式 $ds^2 = \delta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ $n=2$ $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$

③ 自然坐标基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ 用欧氏度规 δ 衡量是正交归一的.

$\delta(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu} dx^\mu (\frac{\partial}{\partial x^\mu}) dx^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu}$

满足 $\delta(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu}$ 的坐标系 (正交归一基底) 未必是自然坐标系.

例如 $x' = x + a, y' = y + b$ (a, b 为常数) 平移 (translation)

$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ (α 为常数) 转动 (rotation).

$x' = -x, y' = y$ / $x' = x, y' = -y$ 反射 (reflection).

Def 9 n 维欧氏空间中满足 $\delta(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \delta_{\mu\nu}$ 的坐标系叫笛卡尔 (Cartesian) 坐标系或直角坐标系

Note: ① 一个坐标系为笛卡尔的, 若其坐标基底用欧氏度规 δ 衡量为正交归一

② 2 维欧氏空间中任意两个笛卡尔系之间的关系只能为平移、旋转、反射.

② 2维欧氏空间中非笛卡尔坐标：极坐标 (r, φ)

基底 $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi\}$ 正交归一 ($\hat{e}_\varphi = r^{-1} \frac{\partial}{\partial \varphi}$) 但坐标基底 $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ 不归一 $g(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}) = r^2 \neq 1$

Def 10 设 $\{x^\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然坐标, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定义度规张量场 η 为 $\eta_i = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$

$\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{R}^n, \eta$) 称为 n 维闵氏空间 (n -dimensional Minkowski space) η 称为闵氏度规

Note: ① η 在自然坐标系的对偶坐标基底 $\{dx^\mu \otimes dx^\nu\}$ 的分量为 $\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ -1 & \mu = \nu = 0 \\ +1 & \mu = \nu \neq 0 \end{cases}$

② 线元表达式 $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$n=4$ $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ 4维闵氏时空的线元—狭义相对论中的元间隔

③ 自然坐标基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}$ 用闵氏度规 η 衡量是正交归一的. (第0坐标基底归-1, 其余归+1)

$$\eta(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \eta_{\mu\nu} dx^\mu (\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) dx^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$$

满足 $\eta(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$ 的坐标 (正交归一基底) 未必是自然坐标 $\{t, x\}$.

例如 $t' = t + a, x' = x + b$ (a, b 为常数) 平移 (translation)

$t' = t \cosh \lambda + x \sinh \lambda, x' = t \sinh \lambda + x \cosh \lambda$ (λ 为常数) 伪转动 (boost)

$t' = -t, x' = x$ / $t' = t, x' = -x$ 反射 (reflection).

Def 10 n 维闵氏空间中满足 $\eta(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \eta_{\alpha\beta}$ 的坐标叫洛伦兹 (Lorentzian) 坐标或伪笛卡尔坐标 (pseudo-Cartesian)

Note: ① 一个坐标为洛伦兹的, 若其坐标基底用闵氏度规 η 衡量为正交归一

② 2维闵氏空间中任意两个洛伦兹系之间的关系只能为平移、伪转动、反射.

S2.6 抽象指标记号 The Abstract Index Notation.

抽象指标:

$T^{\mu\nu}$ 具体指标.

1. (k, l) 型张量 — 上下指标各用 k 个和 l 个拉丁字母 ν^a 代表矢量 ω_a 代表对偶矢量.

张量等式 $du^a + \nu^a = \omega^a$ (不可以为 $\alpha u^a + \nu^b = \omega^a$)

2. 缩并 — 重复上下抽象指标

$$T^a_\alpha = T(e^{\alpha\mu}, e_\mu) = T^\mu_\alpha / T^{ab}_\alpha = T(e^{\alpha\mu}, \cdot; e_\mu) \in V / T^{ab}_b = T(\cdot, e^{\alpha\mu}; e_\mu) \in V$$

3. 张量积记号省略.

$$T \in \mathcal{T}_V(2,1), S \in \mathcal{T}_V(1,1) \quad \mathbb{R}) T \otimes S \Rightarrow T^{ab}_c S^d_c$$

$$\begin{aligned} \mu \otimes \nu(v, u) &= \nu(v)\mu(u) = \omega_a \nu^a \mu_b u^b = \boxed{\omega_a \mu_b} \nu^a u^b = \boxed{\mu_b \omega_a} \nu^a u^b \\ &\Rightarrow \omega_a \mu_b = \mu_b \omega_a \quad (\text{带着自己的抽象指标改换}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu \otimes \omega(v, u) &= \mu(v)\omega(u) = \mu_a \nu^a \omega_b u^b = \boxed{\mu_a \omega_b} \nu^a u^b = \boxed{\omega_b \mu_a} \nu^a u^b \\ &\Rightarrow \mu_a \omega_b = \omega_b \mu_a \end{aligned}$$

$$\mu \otimes \nu \neq \mu \otimes \omega \Rightarrow \omega_a \mu_b \neq \mu_a \omega_b.$$

4. 张量的分量相应指标用小写希腊字母 μ, ν, α, β — 具体指标.

$$T^{ab}_c = T^{\mu\nu}_\sigma (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\sigma)^c \quad \text{where } T^{\mu\nu}_\sigma = T^{ab}_c (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e^\sigma)^c$$

注: $T \in \mathcal{T}_V(0,2) \quad T(\cdot, e_\mu) = C'_2(T \otimes e_\mu) \Rightarrow C'_2[T^{ab}(e_\mu)^c] = T^{ab}(e_\mu)^b = T_{\alpha\mu}$

故 $T_{a1} \dots T_{an}$ 代表 n 个对偶矢量, $T_{\alpha n}$ 代表第 n 个对偶矢量

5. 张量面面观 $T^a_b: V \rightarrow V \quad T^a_b \nu^b \in V$

$$T \in \mathcal{T}_V(1,1) \quad T^a_b: V^* \rightarrow V^* \quad T^a_b \omega_a \in V^*$$

以 δ^a_b 代表从 V 到 V 的恒等映射 $\delta^a_b \nu^b = \nu^a \quad \forall \nu^b \in V$

从 V^* 到 V^* 的恒等映射 $\delta^a_b \omega_a = \omega_b \quad \forall \omega_a \in V^*$

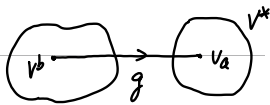
δ^a_b 与任-张量缩并的结果是把该张量的上标 b 换成 a (或把下标 a 换成 b) $\delta^a_b T^{cb}_e = T^{ca}_e$

设 $\{e_\mu\}^a$ 是 V 的基底, $\{e_\mu\}_a$ 是对偶基底 $\delta^a_b = (e_\mu)^a (e^\mu)_b$.

δ^a_b 在此基底上的分量 $\delta^\mu_\nu = \delta^a_b (e^\mu)_a (e_\nu)^b$ 满足 $\begin{cases} +1 & \mu=\nu \\ 0 & \mu \neq \nu \end{cases}$

b. $g_{ab} \in \mathcal{T}_V(0,2)$ $g_{ab}: V \rightarrow V^*$ (V, g_{ab})

$\hookrightarrow g(\cdot, \nu) = C_2^!(g \otimes \nu) = C_2^!(g_{ab} V^c) = g_{ab} V^b = V_a \in V^*$



V 与 V^* 在同构映射 (度规) $g: V \rightarrow V^*$ 自然认同

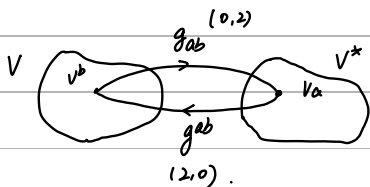
$V^a \Leftrightarrow g_{ab} V^b \equiv g(\cdot, \nu) = V_a$

$V_a = g_{ab} V^b \in V^*$.

c) $V_a = g_{ab} V^b \in V^*$.

$V^b = g^{ab} V_a \in V$

$g \Rightarrow g^{-1}: V^* \rightarrow V$
 $g_{ab} \quad g^{ab}$



③ $V^c = (g^{ca} g_{ab}) V^b$

$g^{ca} g_{ab} = \delta^c_b$

$w_b \Leftrightarrow g^{ab} w_b \equiv g^a(\cdot, w) = w^a$

① g_{ab} 与 g^{ab} 对上下指标分别做 "下降" 和 "上升" 处理.

$w^a = g^{ab} w_b \in V$

$V_a = g_{ab} V^b$ $w^a = g^{ab} w_b$ lower/raise the index.

例如 $g_{ab} T^b_c = T^c_{ae}$.

② g^{ab} 为 g_{ab} 的逆映射

③ 张量等式 $g^{ca} g_{ab} = \delta^c_b \Leftrightarrow$ 分量等式 $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$

证明: $g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g^{ab} (e^\mu)_a (e^\nu)_b g_{cd} (e_\nu)^c (e_\sigma)^d$ $(e^\nu)_b (e_\nu)^c = \delta^c_b$

$= g^{ab} (e^\mu)_a g_{bd} (e_\sigma)^d = (e^\mu)_a (e_\sigma)^a = \delta^\mu_\sigma$

度规 g_{ab} 的非退化性 $\Rightarrow g_{ab}$ 在任一基底下的分量 $g_{\mu\nu}$ 组成的矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 的非退化性

g_{ab} 在某一基底 $\{e_\mu\}^a$ 及其对偶基底 $\{e_\mu\}_a$ 下的分量矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 非退化 $\Rightarrow (g_{\mu\nu})$ 有逆

$\Rightarrow g^{ab} = g^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b$ 满足 $g^{ab} g_{bc} = \delta^a_c$ g_{ab} 有逆映射 $\Rightarrow$ 非退化

$\Rightarrow$ 度规及其逆的分量 $g_{\mu\nu}$ 及 $g^{\mu\nu}$ 可对张量的上下具体指标做下降和上升处理.

$(0,1)$ 型变量 $T(a_1 \dots a_l) = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(l)}}$ π 为 $(1, \dots, l)$ 的一种排列 $\sum$ 对排列求和.

$$T[a_1 \dots a_l] = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} a_{\pi(2)} \dots a_{\pi(l)}} \quad \pi^{(i)} \text{ 为 } \pi \text{ 所代表的排列中第 } i \text{ 个数} \quad \delta_{\pi} = \begin{cases} 1 & \text{偶排列} \\ -1 & \text{奇排列} \end{cases}$$

Claim 2-b-1

a) $T a_1 \dots a_l = T(a_1 \dots a_l)$ [全对称] $\Rightarrow T a_1 \dots a_l = T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$. 即 $T[a_1 \dots a_l]$ 展开式 $l!$ 项都等于 $T a_1 \dots a_l$.

b) $T a_1 \dots a_l = T[a_1 \dots a_l]$ [全反对称] $\Rightarrow T a_1 \dots a_l = \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$

即 $T[a_1 \dots a_l]$ 展开式中偶排列项 = $T a_1 \dots a_l$ 奇排列项 = $-T a_1 \dots a_l$

Claim 2-b-2.

a) $T[a_1 \dots a_l] S^{a_1 \dots a_l} = T[a_1 \dots a_l] S[a_1 \dots a_l] = T a_1 \dots a_l S[a_1 \dots a_l]$ 对称号同理

b) 括号内同种子括号可随意增删 $T[[ab]c] = T[abc]$.

c) 括号内加异种括号得零. $T[(ab)c] = 0$.

d) 异种括号缩并得零 $T^{(abc)} S[abc] = 0$

e) $T a_1 \dots a_l = T[a_1 \dots a_l] \Rightarrow T(a_1 \dots a_l) = 0$

$T a_1 \dots a_l = T[a_1 \dots a_l] \Rightarrow T[a_1 \dots a_l] = 0$

第三章 黎曼(内禀)曲率张量

Chapter 3 Intrinsic Curvature Tensors

§3.1 导数算符 Derivative Operators

$$\vec{v} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} f = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \equiv \text{gradient of } f \text{ [梯度]}$$

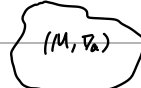
$$\vec{v} = \hat{i} v^1 + \hat{j} v^2 + \hat{k} v^3$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^1}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial v^3}{\partial z} \equiv \text{divergence of } f \text{ [散度]}$$

矢量 V^a 与对偶矢量 $V_a = \delta_{ab} V^b$ 自然认同

三维欧氏空间中的导数算符 $\vec{\nabla}$

↓
流形 M



Def 1 以 $\mathcal{F}_M(k,l)$ 代表流形 M 上全体 C^∞ 的 (k,l) 型张量场的集合

[函数 f 可看作 $(0,0)$ 型张量场(标量场), 故 $\mathcal{F}_M(0,0) = \mathcal{F}_M$].

映射 $\nabla_a: \mathcal{F}_M(k,l) \rightarrow \mathcal{F}_M(k,l+1)$ 称为 M 上的(无挠)导数算符 (torsion-free derivative operator)

若它满足以下条件:

(1) 具有线性性 $\nabla_a(\alpha T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \beta S^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l}) = \alpha \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \beta \nabla_a S^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l}$

(2) 具有莱布尼茨律 $\nabla_a(T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} S^{d_1 \dots d_r}_{e_1 \dots e_s}) = T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} \nabla_a S^{d_1 \dots d_r}_{e_1 \dots e_s} + S^{d_1 \dots d_r}_{e_1 \dots e_s} \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l}$

(3) 与缩并可交换顺序 $C \circ \nabla = \nabla \circ C$ [$\nabla_a(V^b w_b) = V^b \nabla_a w_b + w_b \nabla_a V^b$].

(4) $\nabla(f) = V^a \nabla_a f$ $\forall f \in \mathcal{F}_M, V \in \mathcal{F}_M(0,1)$ $\nabla_a f = (df)_a$ 为函数 f 生成的对偶矢量场



V^a 为欧氏空间中任一矢量场, 其在笛卡儿坐标基底下的展开式 $V^a = V^1 (\frac{\partial}{\partial x})^a + V^2 (\frac{\partial}{\partial y})^a + V^3 (\frac{\partial}{\partial z})^a$

($\mathbb{R}^3, \delta_{ab}$) 对函数 f 的作用 $\nabla(f) = V^1 \frac{\partial f}{\partial x} + V^2 \frac{\partial f}{\partial y} + V^3 \frac{\partial f}{\partial z} = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f = V^a \nabla_a f$

(5) 具有无挠性 (torsion free) $\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ $\forall f \in \mathcal{F}_M$.

满足条件 (a)-(d) 而不满足 (5) 的导数算符称为有挠导数算符 (广义相对论中不使用)

$(\nabla \nabla f)(u, v) = (\nabla \nabla f)(v, u) \quad \forall u, v \in \mathcal{F}_M(1,0)$ 即 $\nabla \nabla f$ 是个对称的 $(0,2)$ 型张量.

· 导数算符的作用

① 任意两个导数算符 ∇_a 和 $\tilde{\nabla}_a$ 作用于同一函数 f [(0,0) 型张量场] 的结果相同 $\nabla_a f = (df)_a = \tilde{\nabla}_a f$

② 作用于对偶矢量场 [(0,1) 型张量场] $u_b, u'_b \in \mathcal{F}_M(0,1)$

作用于矢量场 [(1,0) 型张量场] $\Rightarrow$ 作用于 (k,l) 型张量场

满足 PEM 反对偶变量 ω_b 使 $\omega_b|_p = \omega_b|_p = \omega_b$ (ω_b 和 ω_b' 称为 M_b 在 M 上的两个延拓)

$[\nabla_a \omega_b]_p, [\nabla_a \omega'_b]_p$ 一般并不相等 $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b$ 是 $\tilde{\nabla}_a \omega_b - \nabla_a \omega_b$ 的缩写

Claim 3-1-1 ∇_a 具有局域性

设 $T_1, T_2 \in \mathcal{F}_M(k, l)$ 在 PEM 的某邻域 N 内相等, 即 $T_1|_N = T_2|_N$, 则 $\nabla_a T_1|_p = \nabla_a T_2|_p$.

Claim 3-1-2 设 $PEM, \omega_b, \omega'_b \in \mathcal{F}(0, 1)$ 满足 $\omega'_b|_p = \omega_b|_p$ 则 $[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega'_b]_p = [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$

Pf: 证明 $[\nabla_a(\omega'_b - \omega_b)]_p = [\tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b)]_p$ 设 $\Omega_b = \omega'_b - \omega_b$ 则 $\Omega_b(p) = 0 \Rightarrow \Omega_b(p) = 0$

$$[\nabla_a \Omega_b]_p = \{ \nabla_a [\Omega_b(dx^\mu)_b] \}_p = [\underbrace{\Omega_b}_{=0} \nabla_a(dx^\mu)_b]_p + [(dx^\mu)_b \nabla_a \Omega_b]_p$$

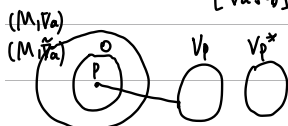
坐标分量

$$[\nabla_a \Omega_b]_p = [(dx^\mu)_b \nabla_a \Omega_b]_p$$

$$[\tilde{\nabla}_a \Omega_b]_p = [(dx^\mu)_b \tilde{\nabla}_a \Omega_b]_p$$

$$\} \text{ 由于 } [\nabla_a \Omega_b]_p = [\tilde{\nabla}_a \Omega_b]_p \text{ 故 } [\nabla_a \Omega_b]_p = [\tilde{\nabla}_a \Omega_b]_p \text{ Q.E.D.}$$

流形上附加结构



意义: $M_b \in V_p^*$, ω_b 为 M_b 在 M 上的一个延拓, 即 $M_b = \omega_b|_p$

Claim 3-1-2 $[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$ 只依赖于 $\omega_b|_p$

即 $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ 是将 p 点的对偶变量 $\omega_b|_p$ 变为了 p 点的 $(0, 2)$ 型张量 $[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$ 的线性映射.

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)_p: \mathcal{T}_{V_p}(0, 1) \text{ 或 } V_p^* \rightarrow \mathcal{T}_{V_p}(0, 2) \quad [\text{任给 } \omega_b]$$

$$[p \text{ 点的 } (1, 2) \text{ 型张量 } C^c_{ab}] \quad [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p = C^c_{ab} \omega_c|_p \quad (0, 2)$$

Claim 3-1-3 $\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c$ (at $\forall p \in M$) $\forall \omega_b \in \mathcal{F}(0, 1)$.

Claim 3-1-4 $C^c_{ab} = C^c_{ba}$ [∇_a 的无挠性导致了张量场 C^c_{ab} 的对称性].

Claim 3-1-5 $\nabla_a V^b = \tilde{\nabla}_a V^b + C^b_{ac} V^c$ (at $\forall p \in M$) $\forall V^b \in \mathcal{F}(1, 0)$.

$$\nabla_a T^b_c = \tilde{\nabla}_a T^b_c + C^b_{ad} T^d_c - C^d_{ac} T^b_d$$

Claim 3-1-6 $\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots b_{i-1} b_{i+1} \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_j C^d_{aj} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_{j-1} c_{j+1} \dots c_l}$ $\forall T \in \mathcal{F}(k, l)$

例: 设 $\{x^\mu\}$ 为 M 上的坐标系, 其坐标基底和对偶基底分别为 $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a\}$ 和 $\{(dx^\mu)_a\}$

在坐标域 O 上定义映射 $\omega: \mathcal{F}_O(k, l) \rightarrow \mathcal{F}_O(k, l)$ $T^b_c \in \mathcal{F}(1, 1)$ $T^b_c = T^\sigma_c(\frac{\partial}{\partial x^\sigma})^b(dx^\mu)_c$

$$\omega T^b_c = (dx^\mu)_a (\frac{\partial}{\partial x^\sigma})^b (dx^\sigma)_c \omega T^\sigma_a \quad \text{其中 } \omega T^\sigma_a = \frac{\partial T^\sigma_a}{\partial x^\mu}$$

[张量场导数的坐标分量等于张量场的坐标分量对坐标的偏导数]

① 任一坐标系的 ∂_a 作用于该系的任一坐标基矢和任一对偶基矢为 0 $\partial_a \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right)^b = 0$ $\partial_a (dx^a)_b = 0$

② $\partial_a \cdot \partial_b$ 可交换 $\partial_a \partial_b T \dots = \partial_b \partial_a T \dots$

∂_a 是一个依赖坐标系的 (0,1) 的导数算符 — 普通导数算符 (ordinary derivative operator).

∇_a 是一个不依赖坐标系的导数算符 — 协变导数算符 (covariant derivative operator) $\partial_a = \nabla_a$

Def 2 设 ∂_a 是 (M, ∇_a) 上任给的坐标系的普通导数算符, 则体现 ∇_a 与 ∂_a 差别的 (张量场) C^c_{ab}

称为 ∇_a 在此坐标系的克氏符 (Christoffel symbol) 记作 Γ^c_{ab} .

Note: 张量定义 $\begin{cases} \text{映射语言} \\ \text{坐标变换} \end{cases}$ $\begin{matrix} \{x^\mu\} \\ \{x^\mu\} \end{matrix} \begin{matrix} \partial_a \longrightarrow \Gamma^c_{ab} \\ \partial'_a \longrightarrow \bar{\Gamma}^c_{ab} \end{matrix}$ ① 作为张量 依赖于坐标 ② 不是张量 $\Gamma^c_{\mu\nu}$ 与 $\bar{\Gamma}^c_{\mu\nu}$ 不按张量变换律变化

张量 坐标系 $\{x^\mu\}$ 坐标系 $\{x'^\mu\}$ 变换律. 其余亦定义 $\{x^\mu\}$ 与 $\{x'^\mu\}$ 系中的克氏符.

Γ^c_{ab} $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} \longleftrightarrow \Gamma^{\sigma'}_{\mu'\nu'}$ 符合.

$\bar{\Gamma}^c_{ab}$ $\bar{\Gamma}^{\sigma}_{\mu\nu} \longleftrightarrow \bar{\Gamma}^{\sigma'}_{\mu'\nu'}$ 符合

克氏符是坐标系依赖的张量. 不符合.

$\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\mu\} \begin{cases} \text{克氏符 } \Gamma^c_{ab} \rightarrow \bar{\Gamma}^c_{ab} \\ \text{一般张量 } C^c_{ab} \text{ 不变 坐标张量 } C^{\sigma}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{C}^{\sigma}_{\mu'\nu'} \end{cases}$

同理 V^b 为张量场 $\partial_a V^b$ 也是坐标依赖的张量 $\nabla_a V^b$ 是与坐标无关的张量.

$V^b = V^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \right)^b = V^\nu \left(\frac{\partial}{\partial x'^\nu} \right)^b$ $\partial_a V^b = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^b \partial_\mu V^\nu$ $\partial'_a V^b = (dx'^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^b \partial'_\mu V^\nu$ $\left. \begin{matrix} \partial_a V^b + \partial'_a V^b \text{ 导致 } V'^\nu_{,\mu} \text{ 与 } V^\nu_{,\mu} \text{ 不满足张量变换律} \\ \text{[其余 } \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} \text{ 不构成张量]} \end{matrix} \right\}$

$V'^\nu_{,\mu}$ 是 $\partial_a V^b$ 的坐标分量. $\nabla_a V^b = (dx^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^b V^\nu_{,\mu}$ $\nabla'_a V^b = (dx'^\mu)_a \left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^b V^\nu_{,\mu}$ $\left. \begin{matrix} \nabla_a V^b = \nabla'_a V^b \text{ 导致 } V'^\nu_{,\mu} \text{ 与 } V^\nu_{,\mu} \text{ 满足张量变换律} \\ \text{[其余 } V^\nu_{,\mu} \text{ 是张量]} \end{matrix} \right\}$

Claim 3-1-7 $V^\nu_{,\mu} = V^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} V^\sigma$ $W_{\nu,\mu} = W_{\nu,\mu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} W_\sigma$

Claim 3-1-8 定义 1 条件 (c) $\nabla \cdot C = C \cdot \nabla \Leftrightarrow \nabla_a \delta^b_c = 0$

其中 δ^b_c 为 (1,1) 型张量场, 在 vpeM 定义为 $\delta^b_c V^c = V^b$ $V^c \in V_p$.

Claim 3-1-1 $[u, v]^a = u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a$ 其中 ∇ 是任一协变导数算符。

$$\begin{aligned} \text{Pf: } [u, v](f) &= u(v(f)) - v(u(f)) = u(v^a \nabla_a f) - v(u^a \nabla_a f) = u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^b \nabla_b (u^a \nabla_a f) \\ &= u^b (\nabla_b v^a) \nabla_a f + \underbrace{u^b v^a \nabla_b \nabla_a f}_{a \leftrightarrow b} - v^b (\nabla_b u^a) \nabla_a f - \underbrace{v^b u^a \nabla_b \nabla_a f}_{a \leftrightarrow b} \quad \text{无挠性 } \nabla_b \nabla_a f = \nabla_a \nabla_b f \end{aligned}$$

$$[u, v]^a \nabla_a f = (u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a) \nabla_a f$$

$$\text{故 } [u, v]^a = u^b \nabla_b v^a - v^b \nabla_b u^a$$

§3.2 矢量场沿曲线的导数和平移. Derivation and Parallel Transport of a vector along a curve

3.2.1 矢量场沿曲线的平移 Parallel Transport of a vector along a curve

Def 1 设 V^a 是沿曲线 $C(t)$ 的矢量场. V^a 称为沿 $C(t)$ 平移的 (parallel transported along $C(t)$)

若 $\nabla_{\dot{C}} V^a = 0$ 其中 $\dot{C}^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是曲线的切矢。

$\nabla_{\dot{C}} f = T(f) = 0$ 函数 f 沿 $\dot{C}$ (即沿 $C(t)$) 的导数为零 $\Rightarrow f$ 沿 $C(t)$ 取值为常数

$\nabla_{\dot{C}} V^a = 0$ 矢量场 V^a 沿 $\dot{C}$ 的导数为零

Claim 3-2-1 设曲线 $C(t)$ 位于坐标系 $\{x^\mu\}$ 的坐标域内,

曲线的参数取为 $x^\mu(t)$, 令 $\dot{C}^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$, 则沿 $C(t)$ 的矢量场 V^a

满足 $\nabla_{\dot{C}} V^a = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a (\frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \dot{C}^\nu V^\sigma)$

$$\text{Pf: } \nabla_{\dot{C}} V^a = T^b (\partial_b V^a + \Gamma^a_{bc} V^c) = T^b [(dx^\mu)_b (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a \partial_\nu V^\mu + \Gamma^a_{bc} V^c]$$

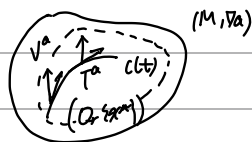
$$= T^\nu (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^a_{bc} T^b V^c \quad (S_b T^b = S_\nu T^\nu \text{ 重复抽象指标可直接换成具体指标})$$

$$= (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a [T^\nu \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} T^\nu V^\sigma] \quad T^\nu \text{ 为曲线切矢 } \dot{C} \text{ 的坐标分量}$$

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{dt} = \frac{dV^\mu}{dt} = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a [\frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} T^\nu V^\sigma]$$

$$\text{平移定义 } \nabla_{\dot{C}} V^a = 0 \Leftrightarrow \frac{dV^\mu}{dt} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} T^\nu V^\sigma = 0 \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

为 n 个关于 $V^\mu(t)$ 的一阶常微分方程 + 初始条件 $\Rightarrow$ 存在唯一解。



Claim 3-2-2 曲线上一点 $C(t_0)$ 及该点的一个矢量 $V^a(t_0)$ 决定唯一的沿曲线平移的矢量场 $V^a(t)$.

M
 V_p
 $\cdot V^a$
 $\cdot U^a \cdot V^b$
 $P, Q \in M \quad V^a \in V_P, U^a \in V_Q \quad V^a, U^a \text{ 无法比较}$
 $(M, g_{ab}) \quad V^a \in V_P \quad \text{曲线 } C(t) \text{ 上有唯一的平移矢量场满足在 } P \text{ 点值为 } V^a$
在 } Q \text{ 点值为 } \tilde{V}^a \in V_Q \rightarrow \text{映射: } V_P \rightarrow V_Q \text{ 依赖于曲线 } C(t)
 联络 (connection) ∇_a 在 V_P 与 V_Q 建立某种曲线依赖的联系

3.2.2 与度规相匹配的导数算符 Derivative Operator associated with a metric

$(M, g_{ab}, \nabla_a) \quad T^a$ 为曲线 $C(t)$ 的切矢 度规 $g_{ab} \rightarrow$ 内积.
 使平移概念与欧氏空间平移保持一致, 补充要求: 两个矢量“平移”时“内积”不变
 V^a, U^a 满足 $T^b \nabla_b V^a = 0, T^b \nabla_b U^a = 0 \Rightarrow g_{ab} U^a V^b (= U^a V_a)$ 在 $C(t)$ 上为常数.

$$\Leftrightarrow 0 = T^c \nabla_c (g_{ab} U^a V^b) = g_{ab} U^a \underbrace{T^c \nabla_c V^b}_{\rightarrow 0} + g_{ab} V^b \underbrace{T^c \nabla_c U^a}_{\rightarrow 0} + U^a V^b T^c \nabla_c g_{ab} \text{ must vanish}$$

补充要求对所有曲线及沿它平移的任意两个矢量场 U^a, V^b 都成立 $\Leftrightarrow$ 对联络附加条件 $\nabla_c g_{ab} = 0$

Claim 3-2-3 流形 M 上选定度规场 g_{ab} 后, 存在唯一的 ∇_a 使 $\nabla_a g_{bc} = 0$

满足 $\nabla_a g_{bc} = 0$ 的 ∇_a 称为与 g_{bc} 适配 (相容) 的导数算符 (联络)

Pf: $\nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{bd} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C_{cab} - C_{bac} = 0 \quad C_{cab}$ 后两个指标对称

$$\left. \begin{aligned} C_{cab} + C_{bac} &= \tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad (1) \\ b \leftrightarrow a \quad C_{cba} + C_{abc} &= \tilde{\nabla}_b g_{ac} \quad (2) \\ c \leftrightarrow b \quad C_{cba} + C_{cab} &= \tilde{\nabla}_c g_{ab} \quad (3) \end{aligned} \right\} (1) + (2) - (3): \quad C^{c}_{ab} = g^{cd} C_{dab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab})$$

若另有 ∇'_a 满足 $\nabla'_a g_{bc} = 0$ 则反映 ∇_a 与 ∇'_a 差别的 $C^c_{ab} = 0 \Rightarrow$ 唯一性 Q.E.D.

$\tilde{\nabla}_a \rightarrow \partial_a \quad C^c_{ab} \rightarrow \Gamma^c_{ab} \quad \Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}).$

推导分量式: $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^c_{ab} (dx^a)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b$ 广义黎曼空间 (M, g_{ab}, ∇_a)
 $= \frac{1}{2} (dx^c)_c \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)^b g^{cd} (\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab})$
 $= \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad \begin{matrix} a \rightarrow \mu & b \rightarrow \nu \\ c \rightarrow \sigma & d \rightarrow \rho \end{matrix}$

对称 $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = \Gamma_{\nu\mu}^{\sigma}$. $\mu, \nu, \sigma = 0, 1, 2, 3$.

40个独立分量 $\Gamma_{00}^0, \Gamma_{01}^0, \Gamma_{02}^0, \Gamma_{03}^0, \Gamma_{11}^0, \Gamma_{12}^0, \Gamma_{13}^0, \Gamma_{22}^0, \Gamma_{23}^0, \Gamma_{33}^0 \times 4$

along a curve of a vector field

3.2.3 矢量场沿曲线的导数与沿曲线的平移的关系 Relation between derivative and parallel

以欧氏空间 $(\mathbb{R}^n, \delta_{ab})$. 笛卡尔系中定义矢量的“绝对”平移 (非曲线依赖)

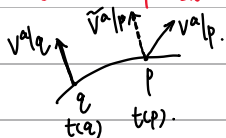
与欧氏度规相匹配的导数算符 $\partial_c \delta_{ab} = 0$ [笛卡尔坐标中的普通导数算符].

推广 $[(M, g_a)]$ 上任意曲线 $C(t)$ v^a 沿 $T^b[C(t)]$ 的导数 $\frac{Dv^a}{dt} \equiv T^b \nabla_b v^a$

以闵氏空间 $(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$ $\partial_c \eta_{ab} = 0$ [洛伦兹坐标中的普通导数算符].

Claim 3-2-4 设 v^a 是 (M, g_a) 的曲线 $C(t)$ 的矢量场, T^b 是 $C(t)$ 的切矢, p, q 是 $C(t)$ 上的邻近

则 $T^b \nabla_b v^a|_p = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\tilde{v}^a|_p - v^a|_p)$ 其中 $\Delta t = t(q) - t(p)$



$\tilde{v}^a|_p$ 是 $v^a|_q$ 沿 $C(t)$ 平移至 p 的结果.

§ 3.3 测地线 Geodesics

Def 1 (M, g_a) 上的曲线 $\gamma(t)$ 叫测地线 (geodesic). 若其切矢 T^a 满足测地线方程 $T^b \nabla_b T^a = 0$

① 测地线 $\gamma(t) \Leftrightarrow \gamma(t)$ 的切矢沿曲线 $\gamma(t)$ 平移.

② 广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 中的测地线是指 (M, g_a) 中的测地线, 其中 ∇_c 与 g_{ab} 适配

$$T^b \nabla_b v^a = 0 \Leftrightarrow \frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{\mu\nu}^a T^\mu T^\nu v^a = 0$$

③ 测地线方程. $T^b \nabla_b T^a = 0$ 切矢坐标分量为 $T^a = \frac{dx^a(t)}{dt}$.

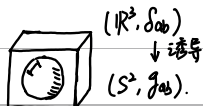
测地线方程的坐标分量表达式 $\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0$ $\mu = 1 \dots n$

例1: 欧氏度规在笛卡尔坐标系下的克氏符 $\Rightarrow$ 测地线方程 $\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0$ $x^\mu(t) = a^\mu t + b^\mu$ [直线]

闵氏度规在洛伦兹坐标系下的克氏符 $\Rightarrow$ 测地线方程 $\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0$ $x^\mu(t) = a^\mu t + b^\mu$

例2: S^2 3维欧氏空间中的2维球面.

$x = r \sin \theta \cos \varphi$ $y = r \sin \theta \sin \varphi$ $z = r \cos \theta$ 笛卡尔系 $\rightarrow$ 球坐标系.



$$\text{线元 } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

无曲线在球面 S^2 上 $r = \text{const}(R)$ $dr = 0 \Rightarrow$ 标准球面线元 $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \Rightarrow$ 诱导度规

$\Rightarrow$ 度规 g_{ab} 在坐标基底 $\{(\frac{\partial}{\partial \theta})^a, (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a\}$ 分量为 $g_{\theta\theta} = R^2$ $g_{\varphi\varphi} = R^2 \sin^2 \theta$ $g_{\theta\varphi} = g_{\varphi\theta} = 0$.

以度规 g_{ab} 进行度量, 球面上的大圆弧为测地线.

• 测地线与曲线参数.

Claim 3-3-1 设测地线 $\gamma(t)$, 则其重参数化 $\gamma'(t')$ 的切矢满足 (α 为在 $\gamma(t)$ 上的某函数)

$$T^b \nabla_b T^a = 0 \Rightarrow T^b \nabla_b T'^a = \alpha T'^a$$

$$\text{Pf: } T'^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \frac{dt}{dt'} = T^a \frac{dt}{dt'}$$

$$0 = T^b \nabla_b T^a = \frac{dt}{dt'} T^b \nabla_b \left(\frac{dt'}{dt} T^a\right) = \left(\frac{dt'}{dt}\right)^2 T^b \nabla_b T'^a + T'^a \frac{dt}{dt'} T^b \nabla_b \left(\frac{dt'}{dt}\right).$$

$$\Rightarrow T^b \nabla_b T'^a = - \underbrace{\left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 \frac{d^2 t}{dt'^2}}_{\equiv \alpha} T'^a = T'^a \frac{dt}{dt'} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt'}{dt}\right) = T'^a \frac{d^2 t'}{dt'^2}$$

非仿射参数化的测地线.

Claim 3-3-2 设曲线 $\gamma(t)$ 的切线 T^a 满足 $T^b \nabla_b T^a = \alpha T^a$ 则存在 $t = t(t')$ 使得 $\gamma'(t')$ 为测地线

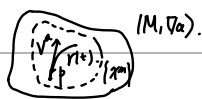
Def 2. 能使曲线成为测地线的参数称为该曲线的仿射参数 (affine parameter)

Claim 3-3-3 若 t 是某测地线的仿射参数, 则该线的任参数 t' 是仿射参数 $\Leftrightarrow t' = at + b$ ($a \neq 0$)

Claim 3-3-4 带联络的流形 (M, ∇_a) 的一点 P 及 P 点的一个矢量 V^a 决定唯一的测地线 $\gamma(t)$, 满足

1) $\gamma(0) = P$ 2) $\gamma(t)$ 在 P 点的切矢等于 V^a .

Pf: 任取一个坐标系 $\{x^\mu\}$ 使其包含 P 关于 n 个待求函数 $x^\mu(t)$ 的



$$\Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\rho}{dt} = 0 \quad n \text{ 个二阶常微分方程.}$$

$x^\mu(0) = x^\mu|_P$ $\frac{dx^\mu}{dt}(0) = V^\mu$ 初始条件.

"一点-矢定-测"

考虑 (M, g_{ab}) 适配性 $\nabla_c g_{ab} = 0$

平移矢量 $T^a T_b T^a = 0$ 则 $T^c \nabla_c (g_{ab} T^a T^b) = g_{ab} T^a T^c \nabla_c T^b + g_{ab} T^b T^c \nabla_c T^a + T^a T^b T^c \nabla_c g_{ab} = 0$

$\Rightarrow$ 平移矢量的自我内积 $g_{ab} T^a T^b$ 为常数 $\rightarrow$ 测地线不变号 $\Rightarrow$ 分类

曲线(测地线)的切矢满足 $g_{ab} T^a T^b$
 类空 > 0 曲线切矢 类空 g_{ab} 为洛伦兹度规的情况下
 类光 $= 0$
 类时的 < 0 测地线总可分为类空、类光与类时

Claim 3-3-5 (非类光)测地线的线长参数必为仿射参数. (不存在“不伦不类”曲线)

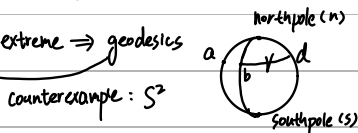
Claim 3-3-6 设 g_{ab} 是流形 M 上的洛伦兹度规场, $p, q \in M$ 则 p, q 间的光滑类空(类时)曲线为测地线
 当且仅当曲线的线长取极值(extremum).

Note: 因变量为线长 L , 自变量为曲线 [微元为曲线之间的微小变化].

泛函(functional) 变分理论: L 取极值 $\Leftrightarrow L$ 的变分 δL 为零.

讨论 g_{ab} 为正定度规: $(\mathbb{R}^n, \text{sub})$ $\xrightarrow{\min} \text{minimum} \Rightarrow \text{extreme} \Rightarrow \text{geodesics}$

极值可以既非极小又非极大:



测地线 s_{nd} 长度大于邻近曲线 s_{buv}

原因: 流形测地线长度取极值 $\Leftrightarrow$ 线上不存在共轭点对 (s, n) (conjugate points).

欧氏空间中不存在共轭点对, 因此两点之间直线(段)最短.

讨论 g_{ab} 为洛伦兹度规: $(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$ $\eta_{ab} \equiv \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b$ 洛伦兹坐标.

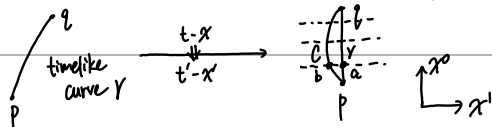
$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{00} dx^0 dx^0 + \eta_{11} dx^1 dx^1 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 = -dt^2 + dx^2 \quad x^0 = t \quad x^1 = x$$

$$\eta_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = -(T^0)^2 + (T^1)^2 = 0 \quad \text{for } T^0 = T^1 \quad \text{null.}$$

$$< 0 \quad \text{for } T^0 > T^1 \quad \text{timelike.}$$

$$> 0 \quad \text{for } T^0 < T^1 \quad \text{spacelike.}$$

闵氏空间中任一类时曲线 C 都不是最短线 $\Rightarrow$ 类时测地线 γ 是 p, q 间的最长线



通过洛伦兹坐标的平移和伪转动
 选择坐标 (x^0, x^1) 使 x^0 坐标线
 与类时测地线 γ 重合.

$$dl_p = \sqrt{|ds|^2} = \sqrt{-dt^2 + dx^2} = dt$$

闵氏时空的类时测地线是最长类时线

$$dl_p = \sqrt{-(-dt^2 + dx^2)} > dt = dl_{pa}$$

类时线最长 $\Leftrightarrow$ 测地线

maximum $\Rightarrow$ extreme $\Rightarrow$ geodesics

↖ x ↗ counterexample: conjugate points

对任意时空中有类时联系的两点: ① 两点间最长线一定为类时测地线

② 两点间的类时测地线未必最长.

③ 两点间无最短类时线

④ 类时测地线长为极大 $\Leftrightarrow$ 线上不存在共轭点.

§3.4 黎曼曲率张量 Riemann Curvature Tensor

3.4.1 黎曼曲率的定义和性质.

导数算符的无挠性 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)f = 0$

∇_a 的对易子 对函数的作用结果为零 $\Rightarrow \nabla_a \nabla_b f$ 对称 $(0,2)$ 型

对其它型张量场结果 $\Rightarrow$ 非对易性

Claim 3-4-1 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f w_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c$

(M, ∇_a)

Claim 3-4-2 设 $w_c, w'_c \in \mathcal{F}(0,1)$ 且 $w_c|_p = w'_c|_p$

则 $[(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w'_c]|_p = [(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c]|_p$.

$\cdot P$
 $w_c|_p = w'_c|_p$

$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a): (0,1)$ 型 $\rightarrow (0,2)$ 型 — 映射为 $(1,2)$ 型张量 $C^c{}_{ab}$.

$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a): (0,1)$ 型 $\rightarrow (0,3)$ 型 — 映射为 $(1,3)$ 型张量 $R_{abc}{}^d$.

在 p 点 $w_c|_p \mapsto [(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c]|_p$.

Def 1 导数算符 ∇_a 的黎曼曲率张量场 $R_{abc}{}^d$ 定义为

$$(M, g_{ab}) \nabla_c \Rightarrow R_{abc}{}^d$$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad \forall \omega_c \in \mathcal{F}(0,1)$$

例: $\square (M^n, \delta_{ab}) \quad \partial_a \delta_{bc} = 0$

普通导数算符可交换顺序

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\partial_a \partial_b - \partial_b \partial_a) \omega_c = (dx^a)_a (dx^b)_b (dx^c)_c (\partial_a \partial_b \omega_c - \partial_b \partial_a \omega_c) = 0$$

Claim 3-4-3 欧氏空间 (M^n, δ_{ab}) 和闵氏空间 (M^n, η_{ab}) 的黎曼曲率张量场为零 $R_{abc}{}^d = 0$

黎曼张量场为零的度规称为平直度规 (flat metric) 如欧氏度规 δ_{ab} , 闵氏度规 η_{ab}

带有平直度规的空间称为平直空间 (flat space) 如欧氏空间, 闵氏空间 [伪欧空间 (pseudo-Euclidean)]
(-1, +1, +1, +1).

Claim 3-4-4 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) v^c = -R_{abd}{}^c v^d \quad \forall v^c \in \mathcal{F}(1,0)$

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega^c = R_{abc}{}^d \omega_d \quad \forall \omega_d \in \mathcal{F}(0,1)$$

Claim 3-4-5 $\forall T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} \in \mathcal{F}(k,l)$ 有

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} = -\sum_{i=1}^k R_{abc}{}^{c_i} T^{c_1 \dots c_{i-1} c_{i+1} \dots c_k}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd}{}^j T^{c_1 \dots c_k}_{d_1 \dots d_{j-1} d_{j+1} \dots d_l}$$

$$\text{例如: } (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^c_d = R_{abd}{}^e T^c_e - R_{abc}{}^e T^e_d$$

黎曼曲率张量以及相关张量的性质

Claim 3-4-6 黎曼曲率张量的性质

$$1) R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$$

$$2) R_{[abc]}{}^d = 0 \quad [\text{循环 (cyclic) 恒等式}]$$

$$3) \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \quad [\text{毕安基 (Bianchi) 恒等式}]$$

若考虑 (M, g_{ab}, ∇_c) 且 $\nabla_a g_{bc} = 0$ 定义 $R_{abcd} = g_{ed} R_{abc}{}^e$

$$4) R_{abcd} = -R_{abdc}$$

$$5) R_{abcd} = R_{cdab}$$

Pf: 1) 由定义可知

$$2) R_{[abc]}{}^d \omega_d = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_{c]} = 2 \nabla_{[a} \nabla_b \omega_{c]} \quad \forall \omega_d \in \mathcal{F}(0,1)$$

$$\nabla_a(\nabla_b w_c) = \partial_a(\nabla_b w_c) - \Gamma_{ab}^d \nabla_d w_c - \Gamma_{ac}^d \nabla_b w_d$$

$$= \partial_a(\partial_b w_c - \Gamma_{bc}^e w_e) - \Gamma_{ab}^d \nabla_d w_c - \Gamma_{ac}^d \nabla_b w_d$$

$$= \partial_a \partial_b w_c - \Gamma_{bc}^e \partial_a w_e - w_e \partial_a \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{ab}^d \nabla_d w_c - \Gamma_{ac}^d \nabla_b w_d$$

$$\nabla_{[a}(\nabla_b w_{c]}) = \partial_{[a} \partial_b w_{c]} - \Gamma_{[bc}^e \partial_{a]} w_e - w_e \partial_{[a} \Gamma_{bc]}^e - \Gamma_{[ab}^d \nabla_{d]} w_c - \Gamma_{[ac}^d \nabla_{b]} w_d.$$

$$\partial_a \partial_b w_c = \partial_b \partial_a w_c \quad \Gamma_{bc}^e = \Gamma_{cb}^e \Rightarrow \nabla_{[a}(\nabla_b w_{c]}) = 0$$

$$\Rightarrow \text{验证 } w_e \nabla_{[a} R_{b]c} d^e = 0 \quad \forall w_e \in \mathcal{T}(0,1)$$

$$w_e \nabla_a R_{bcd}^e = \nabla_a(R_{bcd}^e w_e) - R_{bcd}^e \nabla_a w_e = \nabla_a(\nabla_b \nabla_c w_d - \nabla_c \nabla_b w_d) - R_{bcd}^e \nabla_a w_e$$

$$w_e \nabla_{[a} R_{b]c} d^e = \nabla_{[a} \nabla_b \nabla_c w_d - \nabla_{[a} \nabla_c \nabla_b w_d - R_{[bcd]d}^e \nabla_{a]} w_e = 0.$$

$$\stackrel{=}{=} \underbrace{R_{[abc]d}^e \nabla_e w_d + R_{[abd]c}^e \nabla_e w_c}_{-1} = R_{[bcd]d}^e \nabla_a w_e.$$

$$\forall \nabla_a g_{cd} = 0 \Rightarrow 0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}^e g_{ed} + R_{abd}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc}.$$

5) 习题 利用 4).

$$(0,2) \text{ 型 } T_{ab} \Leftrightarrow (1,1) \text{ 型 } T_a^b \quad \text{分量矩阵互为相似, 有相同的迹 } T_a^a = T(e^{\mu\nu}; e_\mu) = T^\mu_\mu$$

$$T_a^a = g^{ac} T_{ac} \text{ 为 } T_a^b \text{ 的迹 (无需度规), 也为 } T_{ab} \text{ 的迹 (需要度规)}.$$

$$(0,4) \text{ 型 } R_{abcd} \Rightarrow (0,2) \text{ 型的迹} \quad \overset{=0}{g^{ab} R_{abcd}}, \quad \overset{=0}{g^{ac} R_{abcd}}, \quad \overset{=0}{g^{ad} R_{abcd}} \cdot \overset{=0}{g^{bc} R_{abcd}} \cdot \overset{=0}{g^{bd} R_{abcd}} \cdot \overset{=0}{g^{cd} R_{abcd}} = g^{bd} R_{abcd}$$

$$\text{六个缩并中只有一个独立} \quad \xrightarrow{-1} \quad = g^{bd} R_{abcd}$$

trace part $\downarrow$ $\text{trace part} \Rightarrow \textcircled{1} g^{ac} R_{abcd} = R_{bd} \text{ 或 } g^{bd} R_{abcd} = R_{ac} \text{ 称为里奇张量 (Ricci Tensor) } [R_{abcd} \text{ 的迹}]$

注: 定义里奇张量无需借用度规 $R_{ac} \equiv R_{abc}^b$ 有明确定义

但 R_{abcd} 是不可以存在的, R 也不可以存在

$\rightarrow \textcircled{2} g^{ac} R_{ac} \equiv R$ 称为标量曲率 (Scalar Curvature) $[R_{ac} \text{ 的迹}]$.

trace-free part $\downarrow$ $\textcircled{2}$ Def 2 对维数 $n \geq 3$ 的广义黎曼空间, 外尔张量 (Weyl Tensor) C_{abcd} 定义为 R_{abcd} 的无迹部分

$$\text{无迹部分 } C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b} \quad \text{有迹部分}$$

Claim 3-4-7 外尔张量的性质:

$$1) C_{abcd} = -C_{bacd} = -C_{abdc} = C_{cdab} \quad C_{[abc]d} = 0$$

2) C_{abcd} 的各种迹都为零, 例如 $g^{ac} C_{abcd} = 0$

Def 3 广义黎曼空间的爱因斯坦张量 G_{ab} 定义为 $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$

Claim 3-4-8 $\nabla^a G_{ab} = 0$ (其中 $\nabla^a G_{ab} = g^{ac} \nabla_c G_{ab}$)

3.4.2 由度规计算黎曼曲率

非坐标基底 $\{e_\mu\}^a, \{e^\mu\}_a$

带度规的流形 (M, g_{ab}) + 适配联络 $\nabla_a g_{bc} = 0$ + 坐标基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\}^a, \{dx^\mu\}_a \Rightarrow$ 黎曼曲率 $R_{abc}{}^d$

例: 坐标系 $\{r, \varphi\} \rightarrow$ 正交但不归一基底 $\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\}$ [坐标] $\rightarrow$ 正交归一基底 $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi\}$ [非正交]

坐标基底的特殊性质 — 对易性 $[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}] = 0$ 但 $[\hat{e}_r, \hat{e}_\varphi] \neq 0$

$$R_{abc}{}^d \omega_d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c = \nabla_a [\nabla_b \omega_c] - \nabla_b [\nabla_a \omega_c]$$

$$\nabla_b \omega_d =$$

$$\text{因为 } \nabla_a (\nabla_b \omega_c) = \partial_a \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^e \partial_a \omega_e - \omega_e \partial_a \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{ab}^d \nabla_d \omega_c - \Gamma_{ac}^d (\partial_b \omega_d - \Gamma_{bd}^e \omega_e)$$

$$\nabla_a [\nabla_b \omega_c] = \partial_a [\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^e \omega_e] - \Gamma_{cb}^a \partial_a \omega_e - \omega_e \partial_a \Gamma_{bc}^e - \Gamma_{ab}^d \nabla_d \omega_c - \Gamma_{ac}^d \partial_b \omega_d + \Gamma_{cd}^e \Gamma_{be}^d \omega_e$$

$$\Rightarrow R_{abc}{}^d \omega_d = -2 [\omega_d \partial_a \Gamma_{bc}^d - \Gamma_{ca}^e \Gamma_{be}^d \omega_d]$$

$$R_{abc}{}^d = -(\partial_a \Gamma_{bc}^d - \partial_b \Gamma_{ac}^d) + (\Gamma_{ca}^e \Gamma_{be}^d - \Gamma_{cb}^e \Gamma_{ae}^d)$$

$$R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = -\partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho + \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

$$= -\Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho + \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho$$

取定度规 g_{ab} 即(分量)线元 $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

克氏符 $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\nu} (g_{\nu\mu,\sigma} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\sigma,\nu})$

$$\text{黎曼曲率 } R_{\mu\nu\sigma}{}^\rho = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\rho - \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\rho - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \quad (\Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\rho = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\rho}{\partial x^\nu})$$

$$\text{里奇张量 } R_{\mu\sigma} = R_{\mu\nu\sigma}{}^\nu = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\nu - \Gamma_{\nu\sigma,\mu}^\nu + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\nu - \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu$$

§3.5 内禀曲率和外曲率 Intrinsic curvature & Extrinsic curvature

平面  曲面   镶嵌在3维欧氏空间中的2维面

外曲率: 把流形镶嵌进高一维流形所定义的曲率

黎曼曲率 $\rightarrow$ 内禀曲率: 反映流形 M 在指定联络 ∇ 后的“内禀弯曲性”

(M, g_{ab}) 中 R 只是由 g_{ab} (而不必嵌入高维流形) 决定的性质 - (M, g_{ab}) 的内禀性质

(内禀) 弯曲性的等价性质 $\Rightarrow$ 弯曲空间

① 导数算符的非对易性 $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c = R_{abc}^d w_d \quad \forall w_d \in \mathcal{F}(0,1)$

② 矢量平移的曲线依赖性

内禀曲率 R_{abcd} 非零

平直空间 $\rightarrow$ 绝对平移 (∂_a 具有对易性).

弯曲空间 $\rightarrow$ 平移依赖于曲线

存在闭合曲线, 线上某一点的矢量沿线平移一周后不复原

例: S^2



v^a 沿闭合曲线 $abca$ (每段都是大圆弧 [测地线]) 平移一周后不复原

$u^a \rightarrow w^a$ [平移保正交性] 与赤道切矢 T^a 始终正交

③ 存在初始平行后来不平行的测地线

例: S^2 中的两条经线; 欧氏空间平行线永不相交.

· 内禀曲率与外曲率是不同的概念

3维欧氏空间中的2维圆柱面



平面上两条平行直线认同 (粘合) 后

l_1 和 l_2 之间的部分

外曲率非零

内禀曲率为零

$-R_{abcd}$ 仅与 p 点的邻域有关

与曲线认同无关.

第四章 李导数. Killing场和超曲面 Chapter 4 Lie derivatives, Killing field & Hypersurface.

§4.1 流形间的映射. Maps of Manifolds

光滑映射 $\phi: M \rightarrow N$ $\mathcal{F}_M(1,0,0) = \mathcal{F}_M$ $\mathcal{F}_N(1,0,0) = \mathcal{F}_N$

流形 M 和 N 上光滑 (k,l) 型张量场的集合 $\mathcal{F}_M(k,l)$ 和 $\mathcal{F}_N(k,l)$

Def 1 拉回映射 $\phi^*: \mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_M$ 定义为 $\forall f \in \mathcal{F}_N \quad p \in M$

$(\phi^* f) \in \mathcal{F}_M$ s.t. $(\phi^* f)|_p := f|_{\phi(p)}$ 即 $\phi^* f = f \circ \phi$ (pull back).

Def 2 推前映射 $\phi_*: \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_{\phi(p)}$ 定义为 $\forall v^a \in \mathcal{F}_p \quad f \in \mathcal{F}_N$ (pull forward)

$(\phi_* v)^a \in \mathcal{F}_{\phi(p)}$ s.t. $(\phi_* v)(f) := v(\phi^* f)$ 即 ϕ_* 称为 ϕ 的切映射

Def 3 $\phi^*: \mathcal{F}_N(1,0,1) \rightarrow \mathcal{F}_M(1,0,1)$ 定义为 $\forall T \in \mathcal{F}_N(1,0,1) \quad \forall p \in M \quad v_1, \dots, v_l \in \mathcal{F}_p$.

$(\phi^* T) \in \mathcal{F}_M(1,0,1)$ s.t. $(\phi^* T)_{a_1 \dots a_l} |_p (v_1)^{a_1} \dots (v_l)^{a_l} = T_{a_1 \dots a_l} |_{\phi(p)} (\phi_* v_1)^{a_1} \dots (\phi_* v_l)^{a_l}$

Def 4 $\phi_*: \mathcal{F}_{V_p}(k,0) \rightarrow \mathcal{F}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$. 定义为 $\forall T \in \mathcal{F}_{V_p}(k,0) \quad \forall \omega^1 \dots \omega^k \in V_{\phi(p)}^*$ [对偶空间]

$(\phi_* T) \in \mathcal{F}_{V_{\phi(p)}}(k,0)$ s.t. $(\phi_* T)^{a_1 \dots a_k} (\omega')_{a_1} \dots (\omega^k)_{a_k} = T^{a_1 \dots a_k} (\phi^* \omega')_{a_1} \dots (\phi^* \omega^k)_{a_k}$

注: 拉回映射 ϕ^* 能把 N 上的 $(1,0,1)$ 型张量场变为 M 上的同型张量场 (场 $\rightarrow$ 场). $\mathcal{F}_N \rightarrow \mathcal{F}_M$

推前映射 ϕ_* 只把 M 上 $\phi(p)$ 的 $(k,0)$ 型张量变为 N 上像点 $\phi(p)$ 的同型张量 (张量 $\rightarrow$ 张量) $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_{\phi(p)}$

如 $\phi_*: \mathcal{F}_M(1,1,0) \rightarrow \mathcal{F}_N(1,1,0) \quad \forall T \in \mathcal{F}_M(1,1,0) \quad \text{s.t.} \quad (\phi_* T) \in \mathcal{F}_N(1,1,0)$

$(\phi_* T)^a |_q \omega_a := ?$ q 在 N 中, 原像点 $\phi^{-1}(q)$ 无法确定 $\rightarrow \begin{cases} \phi \text{ 非到上} & \phi^{-1} \text{ 可能不存在} \\ \phi \text{ 非一一} & \phi^{-1} \text{ 可能多于一个} \end{cases} \quad T|_{\phi^{-1}(q)} \text{ 被约.}$

$\phi: M \rightarrow N$ 是微分同胚映射 ϕ, ϕ^{-1} 皆为光滑的且一一到上的

$\Rightarrow$ 推前映射 ϕ_* 可把 M 上 $(k,0)$ 型张量场变为 N 上同型张量场

$\phi_*: \mathcal{F}_M(k,0) \rightarrow \mathcal{F}_N(k,0) \quad / (\phi^{-1})^*: \mathcal{F}_M(1,0,1) \rightarrow \mathcal{F}_N(1,0,1) \quad [\phi_*]$.

III $\Rightarrow$ 推前 $\phi_*: \mathcal{F}_M(k,l) \rightarrow \mathcal{F}_N(k,l)$

例如设 $T^a_b \in \mathcal{F}_M(1,1)$ 则 $(\phi_* T)^a_b \in \mathcal{F}_N(1,1)$ 定义为 $\forall q \in N \quad \omega_a \in V_q^* \quad v^b \in V_q$

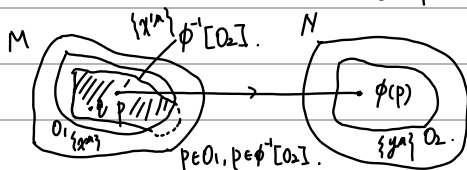
$(\phi_* T)^a_b |_q \omega_a v^b := T^a_b |_{\phi^{-1}(q)} (\phi^* \omega)_a (\phi^* v)^b$.

因 $\Rightarrow$ 推广 $\phi^*: \mathcal{T}_N(k,l) \rightarrow \mathcal{T}_M(k,l)$

—— ϕ^* 与 ϕ_* 为线性映射且互逆. (Claim 4-1-1).

· 微分同胚的主动观点与被动观点.

$\phi: M \rightarrow N$ 为微分同胚 [M 与 N 维数相同] 局部坐标 $p \in O_1 - \{x^\mu\}$ $\phi(p) \in O_2 - \{y^\mu\}$ $\mu=1 \dots n$



在 $\phi^{-1}(O_2)$ 上的新坐标 $\{x'^\mu\}$

定义为 $x'^\mu(p) = y^\mu[\phi(p)]$.

则 $O_1 \cap \phi^{-1}(O_2)$ 自动诱导出生坐标变换 $\{x^\mu\} \xrightarrow{\phi} \{x'^\mu\}$

Claim 4-1-2 设 $C(t)$ 为 M 中的曲线, T^a 为曲线在 $C(t)$ 点的切矢 曲线的切矢的像

则 $\phi_* T^a \in V_{\phi[C(t)]}$ 是曲线 $\phi[C(t)]$ 在 $\phi[C(t)]$ 处的切矢 = 曲线的像的切矢.

坐标变换 $x^\mu \rightarrow x'^\mu \quad \forall q \in O_1 \cap \phi^{-1}(O_2)$.

有切矢 $\phi_* \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \Big|_p \right] = \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right)^a \Big|_{\phi(p)}$.

$\phi_* \left[(dx^\mu)_a \Big|_p \right] = (dy^\mu)_a \Big|_{\phi(p)}$.

对微分同胚 $\phi: M \rightarrow N$

① 主动观点 (active viewpoint) ϕ 为点的变换 $p \rightarrow \phi(p)$. 张量变换 $T|_p \rightarrow \phi_* T|_{\phi(p)}$.

② 被动观点 (passive viewpoint) ϕ 为坐标变换 $\{x^\mu\} \rightarrow \{x'^\mu\}$ 张量不变.

Claim 3 主动、被动观点的等价性.

$$(\phi_* T)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Big|_{\phi(p)} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \Big|_p$$

新点 $\phi(p)$ 的新张量 $\phi_* T$ 在老坐标 $\{y^\mu\}$ 的分量 = 老点 p 的老张量 T 在新坐标 $\{x'^\mu\}$ 的分量.

active viewpoint (点变换、张量变换)

passive viewpoint (坐标变换).

例 1. x'^1 坐标线 ($x'^{2,1}$ 为常数) 的像就是 y^1 坐标线

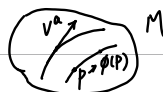
x'^μ 坐标线的切矢 $\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a \Big|_p$ 的像 $\phi_* \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \right)^a \Big|_p \right]$ 就是 x'^μ 坐标线的像 y^μ 坐标线的切矢 $\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu} \right)^a \Big|_{\phi(p)}$

对偶坐标基矢 $(dx'^\mu)_a \Big|_p$ 的像 $\phi_* \left[(dx'^\mu)_a \Big|_p \right]$ 就是 x'^μ 坐标线的像 y^μ 坐标线的对偶坐标基矢

$(dy^\mu)_a \Big|_{\phi(p)}$

§4. 李导数 Lie Derivatives

M上的光滑向量场 $V^a \rightarrow$ 单参微分同胚群 $\phi = \{\phi_t | t \in \mathbb{R}, \phi_t: M \rightarrow M\}$



M上的光滑张量场 $T^a_{\ b}$ $\phi_t^*: \mathcal{T}_M(k,l) \rightarrow \mathcal{T}_M(k,l)$

则 $\phi_t^* T^a_{\ b}$ 也是M上的同型光滑张量场 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* T^a_{\ b} - T^a_{\ b})|_p$ 为张量场 $T^a_{\ b}$ 在P点的某-导数

Def 1 $\mathcal{L}_V T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l})$ 称为张量场 $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ 沿向量场 V^a 的李导数

(Lie Derivative of $T^a_{\ b}$ with respect to V^a)

Claim 4-2-1 $\mathcal{L}_V f = V(f)$. $\forall f \in \mathcal{F}$

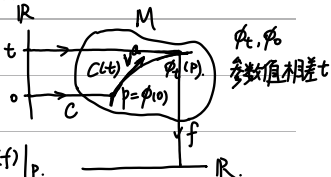
Pf: 曲线 $C(t)$ 是过P点的轨道, $V^a|_p = (\frac{\partial}{\partial t})^a|_p$ 是 $C(t)$ 在P点的切矢.

$$\mathcal{L}_V f|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* f - f)|_p$$

$$\phi_t^* f|_p = f|_{\phi(p)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f|_{\phi(p)} - f|_p]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f[C(t)] - f[C(0)]] = \frac{d}{dt} f[C(t)]|_{t=0} = V(f)|_p$$



· 适配坐标计算李导数

三维坐标 $\{x^1, x^2\}$ s.t. x^1 坐标线选作给定向量场 V^a 的积分曲线 ($t = x^1$). $V^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a$

x^2 坐标线选作为与 x^1 坐标线横截 (交点上两切矢不平行) 的一组曲线

$\Rightarrow$ 向量场 V^a 的适配坐标 (adapted coordinate system to V^a)

— 向量场 V^a 是其适配坐标的第一坐标基矢 $V^a = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a$

Claim 4-2-2 张量场 $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ 沿 V^a 的李导数在 V^a 的适配坐标分量等于 $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ 在适配坐标的分量对 x^1 导数

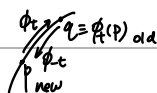
$$(\mathcal{L}_V T)^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = \frac{\partial T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}}{\partial x^1}$$

分量对 x^1 导数

$$\text{Pf: } (\mathcal{L}_V T)^a_{\ b}|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^* T)^a_{\ b}|_p - T^a_{\ b}|_p]$$

$$\phi_t^* = (\phi_t^{-1})_* = \phi_{-t}^*$$

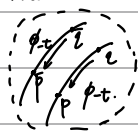
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [(\phi_t^* T)^a_{\ b}|_p - T^a_{\ b}|_p]$$



$$\text{由 Claim 4-1-3 } (\phi_{-t}^* T)^a_{\ b}|_p = T^a_{\ b}|_p = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^{\bar{a}}} \frac{\partial x^{\bar{c}}}{\partial x^b} T^{\bar{a}}_{\ \bar{c}} \right)|_p$$

令域

考虑点 p 附近的一个邻域内的坐标变换 $\forall \bar{c} \in \mathbb{N} \quad \bar{p} = \phi_{-t}(\bar{c})$



诱导新坐标 $x^1(\bar{q}) = x^1(\bar{p})$ $x^{i+1}(\bar{q}) = x^i(\bar{p})$ } $x^{i+1}(\bar{q}) = x^i(\bar{q}) - t$
 逆坐标定义 $x^1(\bar{q}) = x^1(\bar{p}) + t$ $x^i(\bar{q}) = x^i(\bar{p})$ } $x^{i+1}(\bar{q}) = x^{i+1}(\bar{q})$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_\rho \quad \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\mu} = \delta^\sigma_\mu \quad \text{即 } T^\mu_\nu|_q = T^\mu_\nu|_p$$

$$\Rightarrow (L_\nu T^\mu_\nu)|_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [T^\mu_\nu|_q - T^\mu_\nu|_p] = \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^1}|_p$$

不是某张量的分量 Q.E.D.

→ L_ν 满足莱布尼茨律

Claim 4-2-3 $L_\nu u^a = [v, u]^a = v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a$ $v^a, u^a \in \mathcal{F}(1,0)$

Pf: 证明向量等式 $\Leftarrow$ 证明两边在某坐标系(逆西坐标)分量等式

$$[v, u]^a = (dx^\mu)_a [v, u]^a = (dx^\mu)_a (v^b \partial_b u^a - u^b \partial_b v^a)$$

v^a 为逆西坐标的第一坐标基矢

$$= v^b \partial_b u^a = v(u^a) = \frac{\partial u^a}{\partial x^1} = (L_\nu u)^a$$

普通导数算符 $\partial_a \partial_b v^a = 0$

$$\Rightarrow L_\nu u^a = [v, u]^a$$

Claim 4-2-4. $L_\nu w^a = v^b \partial_b w^a + w_b \partial_a v^b$ $v^a \in \mathcal{F}(1,0)$ $w_a \in \mathcal{F}(0,1)$

Claim 4-2-5 $L_\nu T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} = v^c \partial_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} - \sum_{i=1}^k T^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \partial_c v^{a_i} + \sum_{j=1}^l T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l} \partial_{b_j} v^c$

$v^a T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{F}(k,l)$ $v^c \in \mathcal{F}(1,0)$ ∂_a 为任-导数算符.

§4.3 Killing 向量场 Killing Vector Field.

微分同胚 $\phi: M \rightarrow M$ + 比较度规 $\phi^* g_{ab}$ 与 $g_{ab} \Rightarrow$ 等度规映射.

Def 1: 微分同胚 $\phi: M \rightarrow M$ 称为等度规映射 (isometry). 若 $\phi^* g_{ab} = g_{ab}$



[保度规性——每点张量 $g_{ab}|_p$ 与 $\phi^* g_{ab}|_p$ 相等]

$\phi: M \rightarrow M$ 为等度规映射 $\Leftrightarrow \phi^{-1}: M \rightarrow M$ 为等度规映射

Q: 为什么R需要存在 $\{x^a\}$ 满足 $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = 0$ 即得 Killing 向量场

光滑向量场 $V^a \rightarrow$ 单参微分同胚群 $\{\phi_t | t \in \mathbb{R}, \phi_t: M \rightarrow M \text{ is a diffeomorphism}\}$.

度规 $g_{ab} \downarrow \xi^a \rightarrow$ 单参等度规群 $\{\phi_t | t \in \mathbb{R}, \phi_t: M \rightarrow M \text{ is a isometry}\}$.



Def 2: (M, g_{ab}) 上的向量场 ξ^a 称为 Killing 向量场, 若它给出的单参微分同胚(局部)群是单参等度规(局部)群

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}_{\xi} g_{ab} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* g_{ab} - g_{ab}) = 0$$

Claim 4-3-1 ξ^a 为 Killing 向量场 $\Leftrightarrow \xi^a$ 满足 Killing 方程 $V_a \xi_b + V_b \xi_a = 0$ 或

或 $V_a \xi_b = 0$ 或 $V_a \xi_b = V_{[a} \xi_{b]}$ 其中 V_a 满足 $V_a g_{bc} = 0$

$$\text{Pf: } 0 = \mathcal{L}_{\xi} g_{ab} = \xi^c V_c g_{ab} + g_{cb} V_a \xi^c + g_{ac} V_b \xi^c = 0 + V_a \xi_b + V_b \xi_a = V_{(a} \xi_{b)} = 0$$

Claim 4-3-2 若存在坐标 $\{x^a\}$ 使 g_{ab} 的全分量满足 $\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = 0$

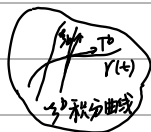
则 $(\frac{\partial}{\partial x^c})^a$ 是坐标域上的 Killing 向量场

Pf: $\{x^a\}$ 为适配坐标 由 Claim 4-2-2 可知 $[\mathcal{L}_{(\partial/\partial x^c)} g]_{ab} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} = 0$ 故 $(\frac{\partial}{\partial x^c})^a$ 为 Killing 向量场

Claim 4-3-3 设 ξ^a 为 Killing 向量场, T^a 为测地线切矢, 则 $T^a V_a (T^b \xi_b) = 0$ 即 $T^b \xi_b$ 在测地线上是常数

$$\text{Pf: } T^a V_a (T^b \xi_b) = \xi_b T^a V_a T^b + T^b T^a V_a \xi_b = 0$$

测地线定义 $V_a \xi_b = V_{[a} \xi_{b]}$



ξ^a, η^a 是 Killing 向量场 $\begin{cases} \text{线性组合 } \alpha \xi^a + \beta \eta^a \text{ 也是 Killing 向量场} \\ \text{对称 } [\xi, \eta]^a \text{ 也是 Killing 向量场} \end{cases} \Rightarrow M \text{ 上所有的 Killing 向量场集合是向量空间, 记作 } \mathcal{K}$

Claim 4-3-4 (M, g_{ab}) 上最多有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立的 Killing 向量场 ($n = \dim M$)

即 M 上所有 Killing 向量场的集合 (作为向量空间 $\mathcal{K}$) 的维数 $\leq \frac{n(n-1)}{2}$

Note: ① 等度规映射是一种保度规的对称操作. $\Rightarrow$ 一个 Killing 向量场代表 (M, g_{ab}) 的一个对称性.

具有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个独立的 Killing 向量场的广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 称为最高对称性空间

② 寻找 (M, g_{ab}) 的全体 Killing 向量场 ($\mathcal{K}$ 的维数) 一般方法是求 Killing 方程的通解.

Q: 为什么只有 ds, Ads, Flat 这些情况?

例1: 找出下列广义黎曼空间的全体独立Killing矢量场 $\rightarrow$ 空间(流形 M +度规 g_{ab})的某一对称性.

1) 2维欧氏空间 $(\mathbb{R}^2, \delta_{ab})$ 笛卡尔坐标系 $\{x, y\}$ 下线元表达式 $ds^2 = dx^2 + dy^2$ $g_{11} = g_{22} = 1$ $g_{12} = g_{21} = 0$

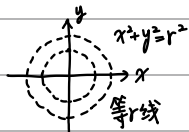
$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \text{ 和 } \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a \text{ 为 Killing 矢量场} \rightarrow \text{平移对称性}$$

极坐标 $\{r, \varphi\}$ 下线元表达式 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$ $g_{11} = 1$ $g_{22} = r^2$ $g_{12} = g_{21} = 0$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a \text{ 为 Killing 矢量场} \rightarrow \text{旋转对称性.}$$

$n=2$ $\frac{n(n+1)}{2} = 3$ 个 Killing 矢量场 即欧氏空间是最高对称性空间

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^a = -y \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a \text{ 展开系数与坐标有关, 三者独立.}$$



2) 3维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 平移对称性 旋转对称性.

$$\text{Killing 矢量 } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a, -y \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, -z \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a, -x \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$$

$n=3$ $\frac{n(n+1)}{2} = 6$ 个 Killing 矢量场 即欧氏空间是最高对称性空间

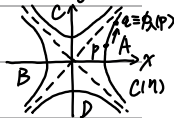
3) 2维闵氏空间 $(\mathbb{R}^2, \eta_{ab})$ 洛伦兹坐标系 $\{t, x\}$ 下线元表达式 $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ $g_{11} = -1$ $g_{22} = 1$ $g_{12} = g_{21} = 0$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a \text{ 和 } \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a \text{ 为 Killing 矢量场} \rightarrow \text{时空平移对称性.}$$

定义新坐标 $\{\psi, \eta\}$ $x = \psi \cosh \eta$ $t = \psi \sinh \eta$ ($0 < \psi < \infty, -\infty < \eta < \infty$) $x^2 - t^2 = \psi^2$ (等 ψ 线)

线元表达式 $ds^2 = d\psi^2 - \psi^2 d\eta^2$ $g_{11} = 1$ $g_{22} = -\psi^2$ $g_{12} = g_{21} = 0$ 仅在 $\mathbb{R}^2$ 上 $x > |t|$ 区域

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \eta} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^a \text{ 为 Killing 矢量场} \rightarrow \text{伪转动 (boost) 对称性}$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^a = t \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$$

在全 $\mathbb{R}$ 有定义

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \mapsto \{\phi_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ isometry}$$

boost Killing vector field

Lorentz coordinate transformation

主动观点.

被动观点.

$$\left(\frac{\partial}{\partial \eta}\right)^a \text{ 在 A, B 区类时, 在 C, D 区类空, 在两条 } 45^\circ \text{ 直线上类光.}$$

$n=2$ $\frac{n(n+1)}{2} = 3$ 个 Killing 矢量场 即闵氏空间是最高对称性空间

4) 4维闵氏空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 最高对称性空间 $n=4$ $\frac{n(n+1)}{2} = 10$ 个独立的 Killing 矢量场

4个平移 $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a$

沿 t, x, y, z 轴平移对称性.

3个空间转动 $-y \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a + x \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a, -z \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^a + y \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a, -x \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a + z \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^a$

绕 z, x, y 轴空间旋转对称性.

在 $t \sim x, t \sim y, t \sim z$ 平面内伪转动下的对称性

$$(1) 3 \text{ 个伪转动} \quad t(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial t})^a \quad t(\frac{\partial}{\partial y})^a + y(\frac{\partial}{\partial t})^a \quad t(\frac{\partial}{\partial z})^a + z(\frac{\partial}{\partial t})^a$$

Claim 4-3-5 设 $\{x, t\}$ 是 2 维闵氏空间 $(\mathbb{R}^2, \eta_{ab})$ 的洛伦兹坐标, $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是伪转动 Killing 场

$\xi^a \equiv t(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 对应的单参等度规群的一个群元 (以参数 λ 刻画的等度规映射), 则由 ϕ 诱导的坐标变换 $\{t, x\} \mapsto \{t', x'\}$ 是洛伦兹变换.

Pf: 老 $\mathbb{P}$ 的老坐标 $x^\mu|_P$ 新坐标 $x'^\mu|_P \equiv x^\mu|_Q$ (微分同胚诱导的坐标变换定义) $x^\mu|_P \mapsto x'^\mu|_P$.

$$\text{矢量场 } \xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a \text{ 积分曲线的切矢 } T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\eta} = (\frac{dt}{d\eta})(\frac{\partial}{\partial t})^\mu + (\frac{dx}{d\eta})(\frac{\partial}{\partial x})^\mu = (\frac{dt}{d\eta}, \frac{dx}{d\eta}) \quad (T^a = \xi^a)$$

$$\text{由于 } (\frac{\partial}{\partial t})^a = x(\frac{\partial}{\partial x})^a + t(\frac{\partial}{\partial t})^a \text{ 故 } T^\mu = (x, t).$$

$$\begin{aligned} C(\eta) \text{ 的 } \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial \eta} = x & \text{设 } C(\eta) \text{ 为满足 } P = C(0) \text{ 的积分曲线} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} = t & \text{即 } x(0) = x_P, t(0) = t_P, \quad \eta = \phi(\lambda) = (t(\lambda), x(\lambda)) \quad \eta = \lambda \end{cases} \\ \text{参数化为 } \eta \text{ 的积分曲线} \quad \sinh \lambda = \frac{e^\lambda - e^{-\lambda}}{2} \quad \cosh \lambda = \frac{e^\lambda + e^{-\lambda}}{2} \\ \text{则该线参数化为} \quad x(\eta) = x_P \cosh \eta + t_P \sinh \eta \quad t(\eta) = x_P \sinh \eta + t_P \cosh \eta \quad \tanh \lambda = \frac{\sinh \lambda}{\cosh \lambda} \quad \cosh^2 \lambda - \sinh^2 \lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'_P \equiv x'_\eta = x(\lambda) = x_P \cosh \lambda + t_P \sinh \lambda \quad \xrightarrow{\text{任意 } \lambda} \quad \begin{cases} x' = x \cosh \lambda + t \sinh \lambda = \cosh \lambda (x + t \tanh \lambda) \\ t' = x \sinh \lambda + t \cosh \lambda = \cosh \lambda (t + x \tanh \lambda) \end{cases} \\ t'_P \equiv t'_\eta = t(\lambda) = x_P \sinh \lambda + t_P \cosh \lambda \end{aligned}$$

$$\text{令 } v = \tanh \lambda \quad \gamma = (1-v^2)^{-1/2} = \cosh \lambda \Rightarrow x' = \gamma(x + vt) \quad t' = \gamma(t + vx) \quad \text{洛伦兹变换 } (c=1).$$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -dt'^2 + dx'^2 \quad \text{洛伦兹系 } \{t, x\} \xrightarrow[\text{诱导的坐标变换}]{\text{boost 对应的等度规映射}} \text{洛伦兹系 } \{t', x'\}.$$

Claim 4-3-6 设 $\{x^\mu\}$ 是 $(\mathbb{R}^n, \eta_{ab})$ 的洛伦兹坐标, 则 $\{x'^\mu\}$ 也是洛伦兹坐标

$\Leftrightarrow \{x'^\mu\}$ 是由 $\{x^\mu\}$ 通过等度规映射 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 诱导而得.

Note: 等度规映射保持坐标系的洛伦兹性/笛卡儿性.

§4.4 超曲面 Hypersurface

Def 1 设 M, S 为流形, $\dim S < \dim M = n$, 映射 $\phi: S \rightarrow M$ 称为嵌入 (embedding)

若 ϕ 是一一的和 C^0 的, 且 $\forall p \in S$ 推前映射 $\phi_*: V_p \rightarrow V_{\phi(p)}$ 非退化

即 $\phi_* V^a = 0 \Rightarrow V^a = 0$

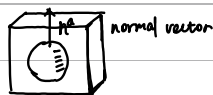
$\Rightarrow$ 嵌入使 S 的拓扑结构和流形结构自然地携带到 $\phi[S]$ 去, $\phi[S]$ 成为流形且 $\phi: S \rightarrow \phi[S]$ 成为微分同胚映射

Def 2 嵌入的像 $\phi[S]$ 称为 M 的一个嵌入子流形 (embedded submanifold)

若 $\dim S = n-1$ 则 $\phi[S] \subset M$ 称为 M 的一张超曲面 (hypersurface)

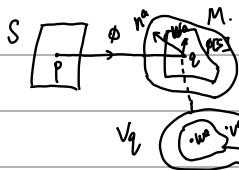
例 1: $S = \mathbb{R}^3 (= M)$ 中的单位球面 S^2 , 则恒等映射 $\phi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 给出 $\mathbb{R}^3$ 的一个嵌入子流形

$\dim S^2 = 2 = 3 - 1$ 故 S^2 为 $\mathbb{R}^3$ 的一个超曲面



· 超曲面的法矢与法余矢.

超曲面的法矢唯一 ($n^a = \alpha n^a$ 相差标量因子) 嵌入流形的法矢不唯一.



$\phi[S]$ 为 M 的超曲面, $q \in \phi[S] \subset M \Rightarrow q$ 有一个 n 维切空间 $\dim V_q = n$

$w^a \in V_q$ 是过 q 点且落在 $\phi[S]$ 上的某条曲线切矢, 则说 w^a 切于 $\phi[S]$.

V 中全体切于 $\phi[S]$ 的元素构成一个 V_q 的子集 W_q , $\dim W_q = n-1$

q 点法矢 n^a 应定义为与 q 点所有切于 $\phi[S]$ 的矢量都正交的矢量

指定度规 $\rightarrow$ 正交性定义法矢 n^a 满足 $g_{ab} n^a w^b = 0$ / 没有度规 $\rightarrow$ 定义法余矢 (法对偶矢量)

Def 3 设 $\phi[S]$ 为超曲面, $q \in \phi[S]$. 非零对偶矢量 $n_a \in V_q^*$ 称为 $\phi[S]$ 在 q 点的法余矢 (normal covector)

若 $n_a w^a = 0 \quad \forall w^a \in W_q$

实数因子

Claim 4-4-1 超曲面 $\phi[S]$ 上任一点 q 必有法余矢 n_a , 法矢量不唯一但 q 点的任意两个法余矢之间只能差一

Pf: 设 $\{e^a\} \dots \{e^{n-1}\}$ 为 W_q 的任-基底 + 与 e^a 线性独立的元素 $(e^n)^a \Rightarrow \{e^a\}_{a=1 \dots n}$ 为 V_q 基底

对偶基底 $\{e^a\}_a \mid a=1 \dots n\}$ 令 $n_a = (e^n)_a$ 则 $n_a (e^c)^a = \delta^n_c = 0 \quad (c=2 \dots n)$

故 $\forall w \in W_q$ 有 $n_a w^a = 0 \Rightarrow n_a = (e^1)_a$ 为 W_q 的法余矢 (m_a 与 n_a 最多只差一个因子 $m_a = m_1 n_a$)

例 2: $\mathbb{R}^3$ 中的超曲面柱有 $f_1 = ax + by + cz = 0$, $f_2 = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$

但 $f_2 = x^2 + y^2 + z^2 = 0$ 不是 [仅有坐标原点满足 $f=0$] $df_2|_{f=0} = 0$

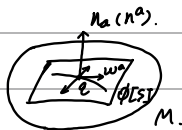
故 $df|_{f=\text{const}} \neq 0$ 则 $f = \text{const}$ 给出 M 中的一个超曲面.

∇f (covector) 正交于由 $f = \text{const}$ 所定义的超曲面.

Claim 4-4-2 以 $\phi[S]$ 代表由 $f = \text{const}$ 定义的超曲面, 设 $q \in \phi[S]$, $\nabla f|_q \neq 0$

则 $\nabla f|_q$ 是 $\phi[S]$ 在 q 点的法余矢.

Pf: w^a 总切于过 q 点且身在于 $\phi[S]$ 上的某曲线 $C(t)$ $\phi[S]$ 上 f 沿 $C(t)$ 为常数.



$w^a \nabla_a f = w(f) = 0$ 且 $\nabla f \neq 0$ 即 ∇f 为 $\phi[S]$ 在 q 点的法余矢.

$\Rightarrow$ 若 M 上有度规 g_{ab} 满足 $g_{ab} n^a w^b = 0$ (即 $n^a \equiv g^{ab} n_b$ 与 $\phi[S]$ 上所有矢量正交) $\forall w^b \in W_q$

n^a 叫超曲面 $\phi[S]$ 在 q 点的法矢 (normal vector)

W_q 一切于 $\phi[S]$ 的矢量.

① g_{ab} 为正定度规 n^a 不属于 W_q $n^a \in V_q - W_q$

② g_{ab} 为洛伦兹度规 n^a 可能属于 W_q

Claim 4-4-3 $n^a \in W_q$ 的必要条件为 $n^a n_a = 0$

Pf: ($\Rightarrow$) $n^a \in W_q$ 则 n^a 可看作 $n_a w^a = 0$ 中的 w^a 故 $n_a n^a = 0$

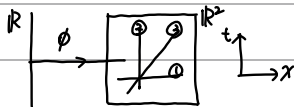
($\Leftarrow$) 对任一法余矢 n_a 存在基底 $\{(e_a)^a\}$ 使 $(e_1)^a \dots (e_n)^a \in W_q$ 且 $n_a = (e^1)_a$

n^a 在这基底的第一分量 $n^1 = n^a (e^1)_a = n^a n_a = 0$ $n^a = \sum_{c=2}^n n^1 (e_c)^a \in W_q$

例 3. 设 $S = \mathbb{R}$, $M = \mathbb{R}^2$, M 上度规 $g_{ab} = \eta_{ab}$, $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 为嵌入, 则 $\phi[\mathbb{R}]$ 为 2 维闵氏时空的超曲面

设 $\{t, x\}$ 为洛伦兹坐标系

① $\phi[\mathbb{R}]$ 与 x 轴平行 $\forall q \in \phi[\mathbb{R}]$ W_q 是一维的.



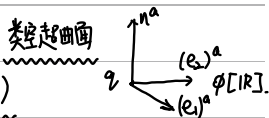
令 $(e_2)^a = (\frac{\partial}{\partial x})^a$ 为 W_q 基底

$(e_1)^a = \alpha (\frac{\partial}{\partial t})^a + \beta (\frac{\partial}{\partial x})^a$ ($\alpha \neq 0$) $\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} V_q \text{ 基底}$

有对偶基矢 $(e^1)_a (e_2)^a = 0$ $(e^1)_a (e^1)^a = 1$ 故取法矢 $(e^1)_a = \alpha^{-1} (dt)_a = N_a$.

$$\text{法矢 } N^a = g^{ab} n_b = \alpha^{-1} g^{ab} (dt)_b = -\alpha^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a$$

可知 $N^a \notin W_q$ ($N^1 = N^a (e^1)_a \neq 0$) 且 $N^a N_a = -1 < 0$ (N^a 为类时)



③ $\phi[IR]$ 与 t 轴平行 $\forall q \in \phi[IR]$ W_q 是一维的.

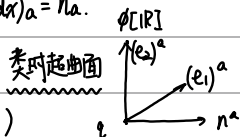
令 $(e^2)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a$ 为 W_q 基底

$$(e^1)^a = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \quad (\beta \neq 0) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (e^1)^a \\ (e^2)^a \end{matrix}} \right\} V_q \text{基底}$$

有对偶基矢 $(e^1)_a (e_2)^a = 0$ $(e^1)_a (e^1)^a = 1$ 故取法矢 $(e^1)_a = \beta^{-1} (dx)_a = N_a$.

$$\text{法矢 } N^a = g^{ab} n_b = \beta^{-1} g^{ab} (dx)_b = +\beta^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a$$

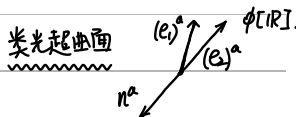
可知 $N^a \notin W_q$ ($N^1 = N^a (e^1)_a \neq 0$) 且 $N^a N_a = +1 > 0$ (N^a 为类空)



② $\phi[IR]$ 为 x 轴, t 轴成 θ 角 $\forall q \in \phi[IR]$

令 $(e^2)^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a$ 为 W_q 基底

$$(e^1)^a = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \beta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \quad (\alpha \neq \beta) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} (e^1)^a \\ (e^2)^a \end{matrix}} \right\} V_q \text{基底}$$



有对偶基矢 $(e^1)_a (e_2)^a = 0$ $(e^1)_a (e^1)^a = 1$ 故取法矢 $(e^1)_a = \frac{1}{\alpha - \beta} [(dt)_a - (dx)_a] = N_a$

$$\text{法矢 } N^a = g^{ab} n_b = \frac{1}{\alpha - \beta} g^{ab} [(dt)_a - (dx)_a] = -\frac{1}{\alpha - \beta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^a \right] = -\frac{1}{\alpha - \beta} (e_2)^a$$

可知 $N^a \in W_q$ ($N^1 = N^a (e^1)_a = 0$) 且 $N^a N_a = 0$ (N^a 为类光)

类光超曲面法矢既与切矢垂直, 本身又是切矢之一 $\Rightarrow$ 印证 Claim 4-4-3.

Def 4 类空超曲面 (spacelike hypersurface) 若其法矢处处类时 ($N^a N_a < 0$)
 类时超曲面 (timelike hypersurface) 若其法矢处处类空 ($N^a N_a > 0$)
 类光超曲面 (null hypersurface) 若其法矢处处类光 ($N^a N_a = 0$)

非类光 $\rightarrow$ 归一化法矢 $N^a N_a = -1$ 或 $N^a N_a = +1$

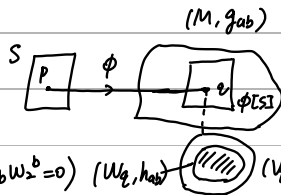
Def 5 设 $\phi[S]$ 是流形 M 中的嵌入子流形, $q \in \phi[S]$, W_q 是 q 点切于 $\phi[S]$ 的切空间

W_q 的度规 h_{ab} 叫做 V_q 的度规 g_{ab} 生出的诱导度规 (induced metric)

$$\text{若 } h_{ab} w_1^a w_2^b = g_{ab} w_1^a w_2^b \quad \forall w_1^a, w_2^b \in W_q$$

① $\phi[SI]$ 为类时或类空超曲面: 诱导度规 h_{ab} 与归一化法矢 n^a

$$h_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b \quad (n^a n_a = \pm 1)$$



$$h_{ab} w_1^a w_2^b = (g_{ab} \mp n_a n_b) w_1^a w_2^b = g_{ab} w_1^a w_2^b \quad (n_a w_1^a = n_b w_2^b = 0) \quad (U_q, h_{ab}) \rightarrow (V_q, g_{ab})$$

诱导度规 h_{ab} 即为将 g_{ab} 限制于 W_q (作用对象范围缩小)

② $\phi[SI]$ 为类光超曲面: $\exists n^a \in W_q$ s.t. $h_{ab} n^a w^b = g_{ab} n^a w^b = 0 \quad (n^a w_b = 0)$

$$\text{非退化性要求 } g_{ab} v^a w^b = 0 \quad \forall w^b \in W_q \Rightarrow v^a = 0 \quad \text{但 } n^a \neq 0$$

Claim 4-4-4 类光超曲面上没有诱导度规 (度规的非退化性被破坏)

• 对于非类光超曲面 $\phi[SI] \quad h^a_b \equiv g^{ac} h_{cb} = \delta^a_b \mp n^a n_b$

$$\forall v^a \in V_q \quad h^a_b v^b = v^a \mp n^a (n_b v^b) \Rightarrow v^a = h^a_b v^b \pm n^a (n_b v^b)$$

v^a 分解 - $\pm n^a (n_b v^b)$ 平行于法矢 n^a 为法向分量

$h^a_b v^b$ 垂直于法矢 n^a 为切向分量

$\Rightarrow h^a_b$ 为从 V_q 到 W_q 的投影映射 (projection map).

第五章 微分形式及其积分

Chapter 5 Differential Forms and Integral

§5.1 微分形式 Differential forms

Def 1 $\omega_{a_1 \dots a_l} \in \mathcal{F}_V(0, l)$ 叫 V 上的 l -次形式 (l -形式) (l -form), 若 $\omega_{a_1 \dots a_l} = \omega_{[a_1 \dots a_l]}$ (记作 ω)

Claim 5-1-1 (a) $\omega_{a_1 \dots a_l} = \omega_{[a_1 \dots a_l]} \Rightarrow$ 对任意基底有 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{[\mu_1 \dots \mu_l]}$.

(b) $\exists$ 基底使 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{[\mu_1 \dots \mu_l]} \Rightarrow \omega_{a_1 \dots a_l} = \omega_{[a_1 \dots a_l]}$.

Claim 5-1-2 设 ω 为 l -形式 则

(a) $\omega_{a_1 \dots a_l} = \delta_{\pi} \omega_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}$ 例: $\omega_{abc} = -\omega_{bac} = \omega_{bca} \dots$

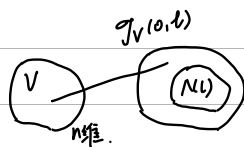
(b) 对任意基底 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \delta_{\pi} \omega_{\mu_{\pi(1)} \dots \mu_{\pi(l)}}$ 凡有重复具体指标者必为零.

V 上全体 l -形式的集合记作 $\wedge(l) \subset \mathcal{F}_V(0, l)$

$\Rightarrow \wedge(l)$ 为 $\mathcal{F}_V(0, l)$ 的线性子空间

① 1-形式 - V 上的对偶向量 $\wedge(1) = V^*$

② 0-形式 - 任意实数 $\wedge(0) = \mathbb{R}$



两个微分形式 $\xrightarrow{\text{操作(求积)}}$ 要求积也为微分形式 $\Rightarrow$ 求出 $\wedge(l)$ 的维数.

Def 2. 设 ω 和 μ 分别为 l -形式和 m -形式, 则其楔积 (wedge product, 楔积) 是按下定义的 $l+m$ -形式:

$$(\omega \wedge \mu)_{a_1 \dots a_{l+m}} = \frac{(l+m)!}{l!m!} \omega_{[a_1 \dots a_l} \mu_{b_1 \dots b_m]} \quad (\omega \wedge \mu)$$

$$\text{映射} \wedge: \wedge(l) \times \wedge(m) \rightarrow \wedge(l+m)$$

楔积满足结合律 $(\omega \wedge \mu) \wedge \nu = \omega \wedge (\mu \wedge \nu)$

$$\text{分配律} \quad \omega \wedge (\mu + \nu) = \omega \wedge \mu + \omega \wedge \nu$$

$$\star \text{ 交换律} \quad \omega \wedge \mu = (-1)^{lm} \mu \wedge \omega \quad \text{对于两个 1-形式} \quad \omega \wedge \mu = -\mu \wedge \omega = \omega_a \mu_b - \omega_b \mu_a$$

Claim 5-1-3 设 $\dim V = n$ 则 $\dim \wedge(l) = \frac{n!}{l!(n-l)!}$ 若 $l \leq n$.

$$\wedge(l) = \{0\} \quad \text{若 } l > n.$$

pf: $n=3, l=2$ 为例 设 $\{e_1^a, e_2^a, e_3^a\}$ 是 V 的基底 $\{e^1_a, e^2_a, e^3_a\}$ 是其对偶基底

$$\begin{aligned} \omega_{ab} &= \omega_{11}(e^1)_a(e^2)_b + \omega_{12}(e^1)_a(e^3)_b + \dots & \omega_{21} &= -\omega_{12} \quad \omega_{32} = -\omega_{23} \quad \omega_{13} = -\omega_{31} \quad \omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0 \\ &= \omega_{12}[(e^1)_a(e^2)_b - (e^2)_b(e^1)_a] + \omega_{23}[(e^2)_a(e^3)_b - (e^3)_b(e^2)_a] + \omega_{31}[(e^3)_a(e^1)_b - (e^1)_a(e^3)_b] \\ &= \omega_{12}(e^1)_a \wedge (e^2)_b + \omega_{23}(e^2)_a \wedge (e^3)_b + \omega_{31}(e^3)_a \wedge (e^1)_b \end{aligned}$$

$\forall \omega_{ab} \in \wedge(2) \quad \omega_{ab} = \sum_C \omega_{\mu\nu}(e^\mu)_a \wedge (e^\nu)_b \quad \sum$ 表示对 3 个数 $(1,2,3)$ 中取 2 个的各种组合 $(12)(23)(31)$ 求和

ω_{ab} 可用 $(e^\mu)_a \wedge (e^\nu)_b \quad \mu, \nu = 1, 2 \quad (\mu, \nu) \in C$ 线性表示且它们彼此线性独立.

$\wedge(2)$ 的一组基 $\dim \wedge(2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3.$

l, n 为任意整数 $(l \leq n)$ 任 l -形式可展开为 $\omega_{a_1 \dots a_l} = \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_l}(e^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^{\mu_l})_{a_l}$

其中 $\{e^1_a \dots e^n_a\}$ 为 V^* 的任-基底. $\dim V = n$

$\omega_{\mu_1 \dots \mu_l}$ 是 ω 在由这-基底构成的 $\mathcal{J}_l(V^*)$ 的基底下的分量 $\omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{a_1 \dots a_l}(e_{\mu_1})^{a_1} \dots (e_{\mu_l})^{a_l}$

$\sum$ 表示对 n 个数 $(1, 2, \dots, n)$ 中取 l 个数的各种组合求和.

$l=0 \quad \forall \omega \in \wedge(l) \quad \omega$ 全部分量为 0 $\Rightarrow \wedge(l) = \{0\}$ 仅有零元

流形 M 上任一点指定 V_p 上的一个 l -形式 $\Rightarrow M$ 上的一个 l -形式场, M 上全体 l -形式场的集合为 $\wedge(M, l)$.

—— 1-形式场是一个对偶矢量场, 0-形式场是一个标量场

M 上光滑的 l -形式场称为 **微分形式场 (differential l-form)**

设 (O, ψ) 为一坐标系, 则 O 上的 l -形式场用对偶坐标基底场 $\{(e^\mu)_a\} \Rightarrow \{(dx^\mu)_a\}$ 逐点线性表示

$$\omega_{a_1 \dots a_l} = \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_l}(dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_l})_{a_l} \quad \text{其中 } \omega_{\mu_1 \dots \mu_l} = \omega_{a_1 \dots a_l} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)^{a_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_l}}\right)^{a_l}$$

特别 $l=n \quad \omega_{a_1 \dots a_n} = \omega_{1 \dots n}(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^n)_{a_n}$

简写 $\omega = \omega_{1 \dots n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

—— 即 M 中任一点的 n -形式 ω 的集合 $\wedge(M, n)$ 是一维向量空间, 基矢为 $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n|_p$,

$\omega_{1 \dots n}$ 为 M 上坐标域的函数(标量场)

· 外微分算符.

Def 3 流形 M 上的外微分算符 (exterior differential operator) 是一个映射 $d: \Lambda_M(l) \rightarrow \Lambda_M(l+1)$

定义为 $(dw)_{b_1 \dots a_l} := (l+1) \nabla_{[b_1} w_{a_1 \dots a_l]}$ 其中 ∇_b 为任一导数算符 $\tilde{\nabla}_{[b} w_{a]} = \nabla_{[b} w_{a]}$

定义外微分 (李导数) 无需求流形有附加结构, 如度规. 联络 $\tilde{\nabla}_{[b} w_{a]} = \nabla_{[b} w_{a]} + C_{[b a]}^c w_c$

例: $l=0$ $w \rightarrow f$ $(df)_b = \nabla_b f$ $(df)_a$ 是 $f \in \Lambda_M(0)$ 的外微分.

Claim 5-1-4 设 $w_{a_1 \dots a_l} = \sum w_{a_1 \dots a_l} (dx^{a_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{a_l})_{a_l}$

$$\text{则 } (dw)_{b_1 \dots a_{l+1}} = \sum (dw_{a_1 \dots a_l})_b \wedge (dx^{a_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{a_l})_{a_l}$$

Claim 5-1-5 $d \circ d = 0$

Pf: $\nabla_b \rightarrow \partial_b$ 坐标导数算符

(同种坐标随意增减)

$$[d(dw)]_{cb_1 \dots a_l} = (l+2)(l+1) \partial_{[c} \partial_{[b_1} w_{a_1 \dots a_l]} = (l+2)(l+1) \partial_{[c} \partial_{b_1]} w_{a_1 \dots a_l} = 0$$

Def 4 ω 为 M 上的 l -形式场 $\left\{ \begin{array}{l} \omega \text{ 是闭的 (closed) 若 } d\omega = 0 \\ \omega \text{ 是恰当的 (exact) 若存在 } l-1 \text{ 形式场 } \mu \text{ 使 } \omega = d\mu \end{array} \right.$

exact $\Rightarrow$ closed

closed $\Rightarrow$ exact ^{locally}



对任意流形 M , 闭的 l -形式场至少是局域恰当的

平凡流形 $M = \mathbb{R}^n$ closed $\Rightarrow$ exact

M 的任一点 p 必有邻域 N , 在 N 上存在 $l-1$ 形式场 μ 使 $\omega = d\mu$

某性质 locally 成立: 对 M 中任一点 p , 都存在一个邻域 N_p 使这性质成立.

E.g. 流形 M 局部地像 $\mathbb{R}^n$, 即每一点都有一个邻域与 $\mathbb{R}^n$ 中一个开集存在微同胚.

而非 M 本身像 $\mathbb{R}^n$.

推论 5-1-6 当 $M = \mathbb{R}^2$ 时 普通微积分有

给定函数 $X(x,y)$ 及 $Y(x,y)$, 存在函数 $f(x,y)$ 使 $df = Xdx + Ydy$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

§5.2 流形上的积分 Integration on the manifold.

• 流形的定向

$(\mathbb{R}^3, \text{dab})$  $\int_L \vec{v} \cdot d\vec{c}$  $\iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} \Rightarrow$ 不可定向的流形上不可做积分 $\Rightarrow$ 流形的“定向”

Def 1 n 维流形称为可定向的 (orientable), 若其上存在 C^0 且处处非零的 n 形式 $\underline{\varepsilon}$.

例1. $\mathbb{R}^3$ 是可定向流形 $\underline{\varepsilon} = dx \wedge dy \wedge dz$

例2 Möbius strip
莫比乌斯带  不可定向流形

Def 2 若在 n 维可定向流形 M 上选定一个 C^0 且处处非零的 n 形式 $\underline{\varepsilon}$, 则说 M 是定向的 (oriented manifold).

设 $\underline{\varepsilon}_1$ 和 $\underline{\varepsilon}_2$ 是两个 C^0 且处处非零的 n 形式, 若存在处处为正的函数 h 使 $\underline{\varepsilon}_1 = h \underline{\varepsilon}_2$, 即说

$\underline{\varepsilon}_1$ 和 $\underline{\varepsilon}_2$ 给出 M 的同一个定向 (n 维流形上的 n 形式集合是一维向量空间)

连通流形上 h 处处非零 + 连续函数 $\Rightarrow$ 处处为正或处处为负 [连通流形只能两种定向].

Note: 拓扑空间是弧连通的 (arcwise connected). 若 X 的任意两点可被一条在 X 中的连续曲线连接

流形为连通的 (等价于弧连通), 若其底拓扑空间是连通的 (§1.2 Def 7)

$\mathbb{R}^3$ 上 $\underline{\varepsilon} = dx \wedge dy \wedge dz$
 $= -dx \wedge dy \wedge dz'$

 坐标定向 $\rightarrow$ 选定流形定向 $\rightarrow$ 判断坐标定向
 [右手系] (right-handed)

Def 3 M 上选以 $\underline{\varepsilon}$ 为代表的定向后, 开域 $O \subset M$ 上的基形式 $\{e_a\}^0$ 叫做以 $\underline{\varepsilon}$ 衡量为右手的. 若 O 上存在处处为正的函数 h 使 $\underline{\varepsilon} = h(e^1)_a \wedge \dots \wedge (e^n)_a$. 其中 $\{(e^n)_a\}$ 是 $\{e_a\}^0$ 的对偶基. 否则称为左手的. 一个坐标系叫右(左)手系, 若其坐标基底是右(左)手的.

• n 维定向流形上的 n 形式 ω 的积分.

对偶坐标基矢 $\{(dx^a)_a\}$.

$\underline{\omega} = \omega_1 \dots \omega_n(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$

n 元函数 (坐标依赖)

n 形式 $\underline{\omega}$ + 坐标系 $\{x^a\} \rightarrow n$ 元函数 $\omega_1 \dots \omega_n(x^1 \dots x^n)$



Def 4 设 $(0, \psi)$ 是 n 维定向流形 M 上的 右手坐标系, ω 是开子集 $G \subset \mathbb{R}^n$ 上的 n 形式场

则 ω 在 G 上的积分 (integral) 定义为 $\int_G \omega := \int_{\psi[G]} \omega_{1...n}(x^1, \dots, x^n) dx^1 \dots dx^n$ [n重积分]
 $\psi[G]$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的开集

Note:

(1) ω 在 G 上的积分与所选右手坐标系无关, 但在左手坐标系 $\rightarrow$ 右手坐标系相差负号

以 $n=2$ 为例: $\int_G \omega = \int_{\psi[G]} \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$

$(\int_G \omega)' = \int_{\psi[G]} \omega_{12} dx^1 \wedge dx^2$ 相等.



$$\omega'_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \omega_{12} = \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} \omega_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \omega_{21} = \omega_{12} \left(\frac{\partial x^1}{\partial x'^1} \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial x^2}{\partial x'^1} \frac{\partial x^1}{\partial x'^2} \right)$$

ω'_{12}

$$\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) \equiv J \text{ (Jacobi)}.$$

$$\int_{\psi[G]} \omega_{12}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 = \int_{\psi[G]} \omega_{12} \left| \det \left(\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \right) \right| dx'^1 dx'^2 = \int_{\psi[G]} \omega'_{12} dx'^1 dx'^2.$$

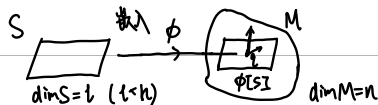
若 $\{x^1, x^2\} \rightarrow \{x'^1, x'^2\}$ 右 $\rightarrow$ 右 $J > 0$

右 $\rightarrow$ 左 $J < 0$ 出现一个负号.

(2) 流形定向 $\rightarrow$ 坐标系定向 $\rightarrow$ 积分符号

(3) ω 在全流形 M 上的积分 $\int_M \omega$ 由局部积分“缝合”而成 [单位分解].

• n 维流形中嵌入 n 维流形上的积分



l 形式场 $\omega \rightarrow \phi^* \omega$ 上的 l 形式场 $\omega|_{\phi^* S}$ 切于 $\phi^* S$ / 不切于 $\phi^* S$

$\phi^* S$ 上的 l 形式场切于 $\phi^* S$: $\forall q \in \phi^* S$ $\omega|_q$ 是 W_q 上的 l 形式

$\omega|_q$ 不切于 $\phi^* S$ 的 l 形式场 ω 把 $\forall q \in \phi^* S$ 上的 W_q 中任意 l 个元素要为一个实数
 $\downarrow$ $\downarrow$
 切于 $\phi^* S$ 的 $\tilde{\omega}$ ω 的作用范围限制在 W_q

Def 5 设 $M_1, \dots, M_n$ 是 l -维流形 $\phi[SI] \subset M$ 上的 l -形式场

$\phi[SI]$ 上的 l -形式场 $\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_n$ 称为 $M_1, \dots, M_n$ 在 $\phi[SI]$ 上的限制 (restriction)

若 $\tilde{M}_1, \dots, \tilde{M}_n|_{\phi(w_1)^{a_1} \dots (w_l)^{a_l}} = M_1, \dots, M_n|_{\phi(w_1)^{a_1} \dots (w_l)^{a_l}} \quad \forall \phi \in \phi[SI] \quad (w_1)^{a_1} \dots (w_l)^{a_l} \in W_\phi$

l -形式场 ω 在 l -维流形 $\phi[SI]$ 上的积分定义为 $\int_{\phi[SI]} \omega \equiv \int_{\phi[SI]} \tilde{\omega}$

§5.3 Stokes 定理 Stokes' Theorem.

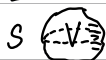
• 3维欧氏空间推广至带边流形

Stokes 定理 $\iint_S (\vec{v} \times \vec{A}) dS = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$

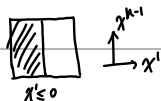
Gauss 定理 $\iiint_V (\vec{v} \cdot \vec{A}) dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

带边流形例子: $\mathbb{R}^n := \{(x^1 \dots x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 \leq 0\}$

边界为 $\mathbb{R}^{n-1} := \{(x^2 \dots x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^1 = 0\}$



区域中的积分与边界上的积分.

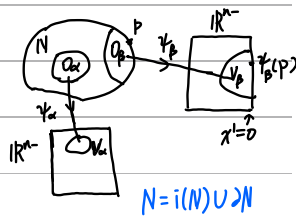


定义 n -维带边流形 N (manifold with boundary):

N 的开覆盖 $\{O_\alpha\}$ 的每一元素 O_α 同胚于 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集

N 中全体被映到 $x^1=0$ 处的点组成 N 的边界 $\partial N \equiv \bar{N}$ (boundary)

∂N 为 $n-1$ -维流形, 内部 (interior) $i(N) = N - \partial N$ 为 n -维流形



例: $\mathbb{R}^3$ 中的实心球体 B 为带边流形 $B = i(B) \cup S^2$ 是 3-维流形.

Claim 5-3-1 Stokes 定理

设 n -维定向流形 M 的紧致子集 N 是个 n -维带边流形, ω 是 M 上的 $n-1$ -形式场 (可微性至少为 C^1)

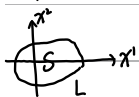
则 $\int_{\partial N} \omega = \int_N d\omega$



Note: M 的定向 (n -form field) $\in$ 限制在 N 上 $\Rightarrow N$ 的定向.

$\Rightarrow$ 在 N 的边界 ∂N 上自然诱导出一个定向 $\underline{\omega}$

例 1: $(\mathbb{R}^2, g_{ab})$. L 是 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑闭曲线, S 是 L 包围的开子集



$\vec{A}$ 是 $(\mathbb{R}^2, g_{ab})$ 上的矢量场

Green 定理
$$\iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2 = \oint_L A_\mu dl$$

$M = \mathbb{R}^2 \quad i(N) = S \quad \partial N = L \quad N = S \cup L. \quad 1\text{-形式 } \omega_a \equiv A_a = g_{ab} A^b$

对偶坐标基矢展开 $A_a = A_\mu(dx^\mu)_a$

$$d\omega = dA_\mu \wedge dx^\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^\mu = \frac{\partial A_1}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 + \frac{\partial A_2}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$\int_N d\omega = \iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2$$

$$\int_{\partial N} \omega = \int_L \tilde{\omega} \quad \tilde{\omega}_a = \tilde{\omega}_i(t) (dl)_a \quad \text{其中 } L \text{ 的局域坐标为线长 } t$$

$$\tilde{\omega}_i(t) = \tilde{\omega}_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = \omega_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = A_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a = A_L$$

限制的定议. $\underline{\omega} = A_L dl$

$$\text{右} = \int_{\partial N} \omega = \oint_L A_L dl$$

$\Rightarrow$ Green 定理是一般流形 M 上 Stokes 定理的特例

§5.4 体元 Volume Element.

流形上对形式场积分 $\rightarrow$ 对函数积分

Def 1 n 维可定向流形 M 上的任一 C^0 且处处非零的 n 形式场 $\in$ 称为一个体元 (volume element)

Note: 定向指的是一个体元 $\in$ 的等价类 $\{ \underline{\xi}_i = h \underline{\xi}_j \ (h > 0) \}$ 体元与定向相容

定向只有两个, 体元有无限多个 (体元选择在一个等价类中任意)

流形 M + 度规场 g_{ab} : 体元选定特殊.

$(M, g_{ab}) n=2$ 体元 $\varepsilon_{a_1 a_2}$ 则 $\varepsilon^{a_1 a_2} = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \varepsilon_{b_1 b_2}$. 且 $\varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon_{b_1 b_2}$ 是标量场

利用正交归一基矢, 考虑正度规

$$\varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon_{a_1 a_2} = g^{a_1 b_1} g^{a_2 b_2} \varepsilon_{b_1 b_2} \varepsilon_{a_1 a_2} = \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\nu_1 \nu_2} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2} \varepsilon_{\nu_1 \nu_2} = \delta^{11} \delta^{22} \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} + \delta^{22} \delta^{11} \varepsilon_{21} \varepsilon_{21} = 2(\varepsilon_{12})^2$$

考虑洛伦兹度规 $\delta \rightarrow \eta$ $\varepsilon^{a_1 a_2} \varepsilon_{a_1 a_2} = -2(\varepsilon_{12})^2$

任意度规 g_{ab} 的 n 维表示形 $\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^S n! (\varepsilon_{1 \dots n})^2$ 正交归一基底下 S 为度规对角元中 (-1) 个数

特定体元: $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$ 在正交归一基 $\{(\mathbf{e}^a)_\alpha\}$ 的分量满足 $\varepsilon_{1 \dots n} = \pm 1$ 右手基为正, 左手基为负.

即 $\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \pm (\mathbf{e}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (\mathbf{e}^n)_{a_n}$

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^S n!$$

满足上式的 $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$ 称为与度规 g_{ab} 相适配 (相容) 的体元.

+ 与定向相容 $\Rightarrow$ 确定唯一体元 — 适配体元

Claim 5-4-1 设 ε 为适配体元, $\{(\mathbf{e}_\alpha)^a\}$ 及 $\{(\mathbf{e}^a)_\alpha\}$ 为基底及其对偶基底, g 为 g_{ab} 在此基底的分量组成的行列式, $|g|$ 为 g 的绝对值 ($\pm$ 对应右手, 左手基底)

则 $\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \pm \sqrt{|g|} (\mathbf{e}^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (\mathbf{e}^n)_{a_n}$

例如 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 右手笛卡尔系 $\{x, y, z\} \rightarrow$ 定向 $\varepsilon = dx \wedge dy \wedge dz$ 且 ε 为适配体元



$$\int_G \varepsilon = \int_G 1 dx dy dz = V_G \quad G \text{ 的体积.}$$

推广至任意带正度规 g_{ab} 的定向流形 N , ε 为适配体元

$\int_N \varepsilon$ 是 N 的 (用 g_{ab} 衡量的) 体积 (1维, 2维为长度, 面积)

Claim 5-4-2 与度规适配的导数算符与体元 $\nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0$

Claim 5-4-3 $\delta^{[a_1}_{a_1} \dots \delta^{a_j}_{a_j} \delta^{a_{j+1}}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n} = \frac{(n-j)! j!}{n!} \delta^{[a_{j+1}}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}$

Claim 5-4-4 (a) $\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^S n! \delta^{[a_1}_{b_1} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}$

(b) $\varepsilon^{a_1 \dots a_j a_{j+1} \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_j b_{j+1} \dots b_n} = (-1)^S (n-j)! j! \delta^{[a_{j+1}}_{b_{j+1}} \dots \delta^{a_n]}_{b_n}$

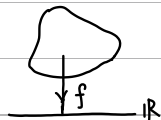
§5.5 函数在流形上的积分, Gauss's law Integral of function on the Manifold, Gauss's law

Def 1 设 ε 为流形 M 上的任一单元, f 为 M 上的 C^0 函数, 则

$n=2 (M, g_{ab})$

f 在 M 上的积分定义为 n 形式场 $f\varepsilon$ 在 M 上的积分, 即

$$\int_M f := \int_M f \varepsilon$$



带边界的流形 $\rightarrow$ 选取唯一的逆配体元 $\rightarrow$ 定义函数积分

$$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab}) \text{ 记 } f\varepsilon = \omega \quad \omega = f dx \wedge dy \wedge dz.$$

(x, y, z) 为右手笛卡尔坐标 f 与 (x, y, z) 结合得三元函数 $F(x, y, z)$

$$\omega = F(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz \quad \int_M f = \int F(x, y, z) dx dy dz.$$

(r, θ, φ) 为右手球坐标 $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad g = r^4 \sin^2\theta.$

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \pm \sqrt{|g|} (e^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (e^n)_{a_n} \quad \varepsilon = r^3 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$$

$\omega = f r^3 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$ f 与 (r, θ, φ) 结合得三元函数 $\tilde{F}(r, \theta, \varphi)$

$$\omega = \tilde{F}(r, \theta, \varphi) r^3 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi \quad \int_M f = \int \tilde{F}(r, \theta, \varphi) r^3 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

Gauss 定理 $\iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV = \oint_S \vec{A} \cdot \hat{n} dS$
 $\uparrow$ 3维体元 $\uparrow$ 2维面元

Claim 5-5-1 设 M 是 n 维定向流形, N 是 M 上的 n 维紧致带边嵌入子流形, g_{ab} 是 M 上的度规 ε 和 ∇_a 是逆配体元和逆配协变算符, V^a 是 M 上的 C^1 矢量场, 则

$$\int_{i(N)} (\nabla_b V^b) \varepsilon = \int_{\partial N} V^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}$$

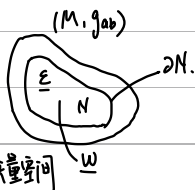
Pf. Stokes 定理 $\int_{i(N)} d\omega = \int_{\partial N} \omega$ 记 $n-1$ 形式场 $\omega = V^b \varepsilon_{ba_1 \dots a_{n-1}}$

$d\omega = n \nabla_{[c} (V^b \varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}|})$ 是 n 形式场 N 中任点的 n 形式的集合是一维向量空间 ω

$\Rightarrow d\omega$ 与 ε 只差一个因子 $n \nabla_{[c} (V^b \varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}|}) = h \varepsilon_{ca_1 \dots a_{n-1}}$ h 为 N 上函数

② 两边与 $\varepsilon^{ca_1 \dots a_n}$ 缩并 左 = $h (-1)^S n!$

$$\text{左} = n \varepsilon^{[ca_1 \dots a_{n-1}] \nabla_c (V^b \varepsilon_{b|a_1 \dots a_{n-1}|}) \quad \text{缩并传递性}$$



补证 Claim 5-4-2 的证明 $\varepsilon^{a_1 \dots a_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = (-1)^s n! \Rightarrow \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0$

Pf: 两边求导 $0 = \varepsilon^{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} + \varepsilon_{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon^{a_1 \dots a_n} = 2 \varepsilon_{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon^{a_1 \dots a_n}$

$$\underbrace{g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n}}_{\substack{\text{由 } \nabla_b \text{ 的度规适配性}}} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \varepsilon_{a_1 \dots a_n} \nabla_b (g^{a_1 b_1} \dots g^{a_n b_n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n}) = \varepsilon_{a_1 \dots a_n} \nabla_b \varepsilon^{a_1 \dots a_n}$$

由此 $\nabla_b \varepsilon^{a_1 \dots a_n} = 0 \Leftrightarrow \nabla_b \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = 0$

故左 = $\frac{n! \varepsilon^{a_1 \dots a_{n-1}} \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}} \nabla_c V^b}{(-1)^s (n-1)! 1! \delta^c_b} = n! (-1)^s \nabla_b V^b$

左 = 右 可知 $h = \nabla_b V^b$

$$\Rightarrow d\underline{\omega} = h \underline{\varepsilon} = (\nabla_b V^b) \underline{\varepsilon} \quad \text{得} \quad \int_{i(N)} d\underline{\omega} = \int_{i(N)} (\nabla_b V^b) \underline{\varepsilon} = \int_{\partial N} \underline{\omega} = \int_{\partial N} V^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}} \quad \text{Q.E.D.}$$

对于非类光超曲面 ∂N , 归一化法矢 n^a 满足 $n^a n_a = \pm 1 \Rightarrow N$ 的度规 g_{ab} 在 ∂N 上诱导度规 $h_{ab} = g_{ab} \mp n_a n_b$

$\underline{\varepsilon}$ 是 (N, g_{ab}) 上的适配体元 $\Rightarrow \hat{\underline{\varepsilon}}$ 为 $(\partial N, h_{ab})$ 上的诱导体元要求:

$$\textcircled{1} \hat{\underline{\varepsilon}} \text{ 与度规 } h_{ab} \text{ 相适配} \quad \hat{\underline{\varepsilon}}^{a_1 \dots a_{n-1}} \hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}} = (-1)^{\hat{s}} (n-1)! \\ \text{其中 } \hat{s} \text{ 为 } h^{ab} \text{ 升指标 } h_{ab} \text{ 对称冲积个数}$$

$\textcircled{2} \hat{\underline{\varepsilon}}$ 与 ∂N 的诱导定向 $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$ 相容

设 n^b 为 ∂N 的外向单位法矢 (以 $i(N)$ 作为内部), 则诱导体元 $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$ 与 N 上体元 $\varepsilon_{a_1 \dots a_n}$

关系为 $\hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}} = n^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}}$

Claim 5-2-2 (Gauss 定理)

设 M 是 n 维定向流形, N 是 M 上的 n 维紧致带边嵌入子流形, g_{ab} 是 M 上的度规,

$\underline{\varepsilon}$ 和 ∇_a 是适配体元和适配导数算符, $\hat{\underline{\varepsilon}}$ 是 ∂N 上的诱导体元, ∂N 的外向法矢 n^a 满足 $n^a n_a = \pm 1$,

V^a 是 M 上的 C^1 向量场, 则 $\int_{i(N)} (\nabla_a V^a) \underline{\varepsilon} = \pm \int_{\partial N} V^a n_a \hat{\underline{\varepsilon}} \quad (n^a n_a = +1/-1 \text{ 取 } +1/-1)$

Pf: 令 $\underline{\omega} = V^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}}$ 应证 $\int_{\partial N} V^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}} = \int_{\partial N} \underline{\omega} = \pm \int_{\partial N} V^a n_a \hat{\underline{\varepsilon}}$

指 $\int_{\partial N} \tilde{\omega}$ 限制在 ∂N 上

故应证 $\tilde{\omega}_{a_1 \dots a_{n-1}} = \pm V^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$ 都是一点上的 $n-1$ 形式

$$\rightarrow \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_{n-1}} = K V^b n_b \hat{\varepsilon}_{a_1 \dots a_{n-1}}$$

应证 $K = \pm 1$

法于超曲面 切于超曲面.

右手正则基 $\{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a \dots (e_{n-1})^a\}$ 对上式两边缩并 $(e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}}$

$$\hat{e} = K v^b n_b \hat{e}_{1 \dots (n-1)} = \pm K v^b (e^0)_b \hat{e}_{1 \dots (n-1)} = \pm K v^0 \quad \hat{e}_{1 \dots (n-1)} = 1.$$

$$n^a n_a = \pm 1 \quad n_a = \pm (e^0)_a \quad \{(e_0)^a = n^a, (e_1)^a \dots (e_{n-1})^a\} \text{ 右线性 } \{(e_1)^a \dots (e_{n-1})^a\} \text{ 右线性}$$

$$\hat{e} = \tilde{\omega}_{a_1 \dots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}} = \omega_{a_1 \dots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}}$$

$$= v^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}} (e_1)^{a_1} \dots (e_{n-1})^{a_{n-1}}$$

$$= v^b \varepsilon_{b a_1 \dots a_{n-1}} = v^0 \varepsilon_{0 1 \dots (n-1)} = v^0$$

$$\hat{e} = \text{右可积} \quad \pm K v^0 = v^0 \quad K = \pm 1 \quad \text{Q.E.D.}$$

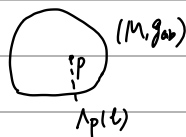
若 Σ 为类光超曲面, 即 $n^a n_a = 0$ 诱导体积元为 $\frac{1}{n} \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = n_{[a} \hat{e}_{a_2 \dots a_n]}$.

Gauss定理仍成立.

§5-6 对偶微分形式 Dual differential forms.

$\Lambda_p(l)$ 为 $p \in M$ 的全部 l 形式的集合 $\dim \Lambda_p(l) = \frac{n!}{l!(n-l)!} = \dim \Lambda_p(n-l)$

M 为带度规 g_{ab} 的定向流形, ε 为逆体积元



$\Rightarrow$ 在 $\Lambda_p(l)$ 和 $\Lambda_p(n-l)$ 之间定义同构映射 $\star: \Lambda_p(l) \rightarrow \Lambda_p(n-l)$

Def 1. $\forall \omega \in \Lambda_p(l)$, 定义 ω 的对偶微分形式 (dual form) $\star \omega \in \Lambda_p(n-l)$ 为 [Hodge star $\star$]

$$\star \omega_{a_1 \dots a_l} := \frac{1}{l!} \omega^{b_1 \dots b_l} \varepsilon_{b_1 \dots b_l a_1 \dots a_{n-l}} \quad \text{其中 } \omega^{b_1 \dots b_l} = g^{b_1 a_1} \dots g^{b_l a_l} \omega_{a_1 \dots a_l}$$

例如 $f \in \mathcal{F}_M$ 为 0 形式场, 对偶形式场 $(\star f)_{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{0!} f \varepsilon_{a_1 \dots a_n} = f \varepsilon_{a_1 \dots a_n}$.

$\star f$ 等于与度规适配的体元 ε 的 f 倍

$$\int_M f = \int_M f \varepsilon = \int_M \star f \quad \text{对偶形式场积分.}$$

$$\star(\star f) = \star(f \varepsilon) = \frac{1}{n!} f \varepsilon^{b_1 \dots b_n} \varepsilon_{b_1 \dots b_n} = (-1)^S f.$$

$$\text{Claim 5-6-1 } \star \star \omega = (-1)^{S+l(n-l)} \omega \quad (-1)^S n!$$

· 微分几何与理解 3 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 上的矢量代数和矢量场论 $M = \mathbb{R}^3 \quad g_{ab} = \delta_{ab}$

(1) 0-形式场 = 标量场

1-形式场 = 对偶矢量场变为矢量场 $\omega^a = \delta^{ab} \omega_b$.



2-形式场 $n=3 \quad l=2 \quad \Lambda_M(2)$ 与 $\Lambda_M(1)$ 之间存在同构使 $\omega \in \Lambda_M(1)$ 与 $*\omega \in \Lambda_M(2)$ 认同

3-形式场 $n=3 \quad l=3 \quad \Lambda_M(3)$ 与 $\Lambda_M(0)$ 之间存在同构使 $\omega \in \Lambda_M(3)$ 与 $*\omega \in \Lambda_M(0)$ 认同

消除 3 使用 1, 2, 3 形式场必要性, 可用函数与矢量场代替.

① 矢量代数: 点乘 $\vec{A} \cdot \vec{B} = \delta_{ab} A^a B^b = A^a B_a$

叉乘 $\omega_{ab} = A_a \wedge B_b = 2A_{[a} B_{b]}$. $(A_a = \delta_{ab} A^b, B_b = \delta_{ab} B^a)$

$(*\omega)_c = \frac{1}{2} \omega^{ab} \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{abc} A^{[a} B^{b]} = \varepsilon_{abc} A^a B^b$ ε_{abc} 为通配体元

$\{x, y, z\}$ 为右手笛卡尔坐标, $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ 正交归一基底 $\Rightarrow \varepsilon_{abc}$ 为 Levi-Civita 符号

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{312} = -\varepsilon_{132} = -\varepsilon_{213} = -\varepsilon_{231} = 1$

$*\omega_k = \varepsilon_{ijk} A^i B^j \quad k=1, 2, 3$ 为 $\vec{A} \times \vec{B}$ 的第 k 分量

即 $\vec{A} \times \vec{B} = *\omega = *(\vec{A} \wedge \vec{B})$.

② 矢量场论: $\vec{\nabla}$ 是与欧氏度规 δ_{ab} 适配的导数算符 ∂_a

$\vec{\nabla} f = \partial_a f \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_a A^a \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \varepsilon^{abc} \partial_a A_b$

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \vec{B}) = \partial_a (A^a B^b) \quad \vec{\nabla} \vec{A} = \partial^a A^b \quad \nabla^2 f = \partial_a \partial^a f \quad \nabla^2 \vec{A} = \partial_a \partial^a A^b$

③ 梯度、旋度、散度用外微分表示

Claim 5-6-2 设 $f, \vec{A}$ 是 3 维欧氏空间的函数与矢量场, 则

$\text{grad } f = df = \nabla f \quad \text{div } \vec{A} = *d(*\vec{A}) \quad \text{curl } \vec{A} = *\underline{dA}$

$\mathbb{R}^3$ 是平凡流形 $\rightarrow \mathbb{R}^3$ 上的闭形式场 $d\omega = 0$ 必恰当 $\omega = d\underline{\omega}$

$\Rightarrow$ ① 无旋矢量场必可表为梯度 $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \Leftrightarrow \text{curl } \vec{E} = 0 \Rightarrow \exists$ 标量场 ϕ s.t. $\vec{E} = \text{grad } \phi$

② 无散矢量场必可表为旋度 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists$ 矢量场 $\vec{A}$ s.t. $\vec{B} = \text{curl } \vec{A}$

Pf: $\text{curl } \vec{E} = 0 \Leftrightarrow *(dE) = 0 \Rightarrow dE = 0$ (闭的) $\Rightarrow \exists \phi$ s.t. $E = d\phi$ (恰当的) $\Rightarrow \vec{E} = \text{grad } \phi$

$\text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow *d(*\vec{B}) = 0 \Rightarrow d(*\vec{B}) = 0$ (闭的) $\Rightarrow \exists \vec{A}$ s.t. $*\vec{B} = d\vec{A}$ (恰当的) $\Rightarrow \vec{B} = *\underline{dA} \Rightarrow \vec{B} = \text{curl } \vec{A}$

第六章 狭义相对论 Chapter 6 Special Relativity

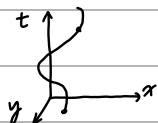
§6.1 4维表述基础 Foundation of 4-dimensional expression

6.1.1 预备知识. [模型语言].

事件 (event): 空间的一点和时间的一个瞬间的结合 $(\vec{r}, t)$. 一时空点 (spacetime point)

时空 (spacetime): 全部事件的集合.

粒子 (particle) $\left\{ \begin{array}{l} \text{有(静)质量的: 质点 (point mass)} \\ \text{无(静)质量的: 光子 (photon).} \end{array} \right.$



粒子的世界线 (world line): 粒子的全部历史由一系列事件组成, 对应于时空中的一条曲线

$\Rightarrow$ 时空图 (spacetime diagram): 竖直向上代表时间流逝, 水平方向代表某一时刻的全空间

观察者 (observer): 观察者模型化成的质点.

标准钟 (standard clock): 观者处的钟, 读数为观者的固有时 (proper time)

参考系 (reference frame): 无数观者的集合 $\cap$ 满足时空 (或其中一个子集) 中的任一点有且仅有一个观者的世界线经过 [世界线的线汇].

刚性参考系: 参考系内的世界线相互平行

伽利略 Galileo ① 相对性原理 (Principle of Relativity): 所有惯性系平权.

所有物理定律在任一个惯性系中表现形式一致.

② 伽利略变换. $\begin{array}{c} y \\ \uparrow \\ x' \\ \leftarrow \rightarrow \\ x \end{array}$ $x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$

绝对时空观: 同时性的绝对性 (一个参考系中两事件同时, 则所有系内两事件同时)

粒子相对于两参考系的速率关系: 伽利略速度合成 $u' = u - v$

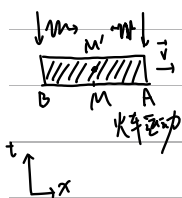
麦克斯韦 Maxwell 电磁场理论: 麦克斯韦方程组 $\rightarrow$ 电磁波方程 波速为 c

静止观者与运动观者观测光速皆为 c 矛盾.

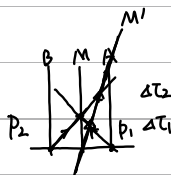
$\left\{ \begin{array}{l} \text{A. 相对性原理对电磁理论不成立, 存在一个特殊惯性系中光速为 } c \\ \text{B. 麦克斯韦电磁理论不正确.} \end{array} \right. \rightarrow X$
以太 (ether)

爱因斯坦 Einstein 两事件的同时与否是惯性系依赖的

相对时空观：同时性的相对性。



时空图



狭义相对性：① 相对性原理

② 光速不变原理

时空是均匀且各向同性的

两个惯性参考系的坐标之间的变换为洛伦兹变换 $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$. $c=1$.

$$x' = \gamma(x - vt) \quad y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \gamma(t - vx)$$

[boost].

狭义相对性 ① 存在极限速度 $v < c$

$$\text{② 速度合成法则} \quad u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - u_x v)} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - u_x v)}$$

1° $u_x = 1 \Rightarrow u'_x = 1$ 光速在惯性系中不变。

2° 两事件之间的间隔不变 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 \equiv ds'^2$

6.1.2 狭义相对论的背景时空。

时空是一个连续统 $\rightarrow$ 4维带附加结构的流形

Ⅲ 牛顿引力论 $(\mathbb{R}^4, \text{附加内禀结构})$

Ⅳ 狭义相对论 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

η_{ab} 为闵氏度规 $\Rightarrow$ 4维闵氏时空。

Ⅴ 广义相对论 (M, g_{ab})

4维带度规的连续流形

SR: 洛伦兹变换证明间隔不变性 $-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$. 惯性坐标 (t, x, y, z) .

① 洛伦兹坐标 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ 闵氏空间的线元 $ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$

② 具有洛伦兹不变性. $ds^2 = ds'^2$.

③ 坐标取值范围 $t, x, y, z \in (-\infty, +\infty)$.

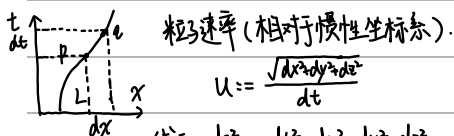
$x^0, x^1, x^2, x^3 \in (-\infty, +\infty)$.

$\Rightarrow$ 狭义相对论的背景时空 = 4维闵可夫斯基空间。

Physics	Mathematics
惯性坐标系 inertial coordinates	洛伦兹坐标系 Lorentz coordinates
间隔 interval	闵氏线元 Minkowski line element
背景时空 background spacetime	4维闵氏空间 4-dimensional Minkowski space
观者 observer (point mass)	类时曲线 timelike curve
惯性观者 inertial observer	类时测地线 timelike geodesic.

狭义相对论物理学是研究物理客体在闵氏时空中的演化规律的科学。

发生在闵氏时空中的任何物理现象都属于狭义相对论物理学范畴。



线元 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -(1-u^2)dt^2$

① $ds^2 = 0 \Leftrightarrow u = 1 (c)$. 类光线元

② $ds^2 < 0 \Leftrightarrow u < 1 (c)$. 类时线元

狭义相对论的两个重要基本信念

4维语言.

① 光子相对于任何惯性系的速率 $u = 1 \Leftrightarrow$ 光子世界线是闵氏时空的类光曲线 (null)

② 质点相对于任何惯性系的速率 $u < 1 \Leftrightarrow$ 质点世界线是闵氏时空的类时曲线 (timelike).

涉及速率 u 的定义 如何定义的速率“不得超光速”

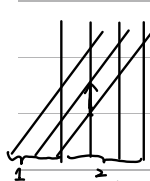
真正产生问题的情况:

“超光速”但不违背相对论——超光速退行速度

世界线为类空曲线的质点.

“超光速”但不能携带信息与能量.

6.1.3 惯性观者和惯性系.



(t, x) 坐标线: 惯性观者: ① 在所有观者中特殊的一类观者

$(\frac{\partial}{\partial t})^a = T^a$ (inertial observer) ② 各惯性观者平权.

3维语言: 惯性观者相对于所在的惯性参考系 $\{t, x, y, z\}$ 的速率 $u=0$

惯性参考系. $\partial_b(\frac{\partial}{\partial t})^a = 0$ 坐标系的普通导数算符 ∂_b 作用于该坐标系的坐标基矢 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 为零

$\Rightarrow (\frac{\partial}{\partial t})^b \partial_b(\frac{\partial}{\partial t})^a = 0$ 闵氏时空的测地线方程 $\rightarrow$ 类时测地线.

洛伦兹坐标系的每一条 t 坐标线/一条类时测地线 对应于一个惯性观者

全体 t 坐标线/一组平行的类时测地线组成的参考系称为惯性参考系

惯性参考系中的洛伦兹坐标系称为 惯性坐标系, 每一点有坐标 (x^0, x^1, x^2, x^3)

[同一系内所有惯性观者的世界线为平行测地线]

质点“自由”或“做惯性运动” $\Leftrightarrow$ 质点世界线为类时测地线.

• Claim 4-3-6 4维闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中 $\{x^\mu\} \xrightarrow{\phi} \{x'^\mu\}$.

洛伦兹系之间的坐标变换 $\Leftrightarrow (\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的等度规映射.

任一等度规映射可由若干基本的等度规映射复合成

基本等度规映射 - 分立: 反射和反演.

- 连续: (a) 时空平移 4个独立 Killing 矢量场 $(\frac{\partial}{\partial t})^a, (\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial z})^a$

(b) 空间旋转 3个独立 Killing 矢量场 $-y(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial y})^a$

同一个惯性参考系内部坐标变换: $-z(\frac{\partial}{\partial y})^a + y(\frac{\partial}{\partial z})^a, -x(\frac{\partial}{\partial z})^a + z(\frac{\partial}{\partial x})^a$.

不同惯性参考系中坐标变换: (c) 洛伦兹转动 3个独立 Killing 矢量场 $t(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial t})^a$

(t 坐标线不同). $t(\frac{\partial}{\partial y})^a + y(\frac{\partial}{\partial t})^a, t(\frac{\partial}{\partial z})^a + z(\frac{\partial}{\partial t})^a$

6.1.4 固有时与坐标时.

Def 1 一个钟称为标准钟或理想钟 (ideal clock), 若它在自己世界线上任二点 P_1, P_2 的读数 [固有时] τ_1, τ_2 之差即该线在 P_1, P_2 的线长 $\tau_2 - \tau_1 = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{ds^2} / (c)$.

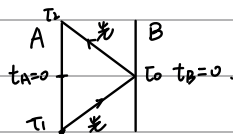
标准钟要求走时率 (rate).

参考系内的钟同步问题涉及初始设定 (setting).

(clock synchronization)

四 观者 G 和 G' 将钟调零 — 信号传播需要时间. 无法同步

四 观者 G 在 τ_1 发射光, G' 在 τ_0 反射并调零, G 在 τ_2 收到反射光



P_0 是 G 世界线上 $P_1 P_2$ 段中点, G 在 P_0 调零 $\Rightarrow$ 钟同步

设坐标中 x^0 是类时坐标 $\eta_{ab} (\frac{\partial}{\partial x^a})^a (\frac{\partial}{\partial x^b})^b < 0$ x^1, x^2, x^3 是类空坐标 $\eta_{ab} (\frac{\partial}{\partial x^a})^a (\frac{\partial}{\partial x^b})^b > 0$

事件 P 在坐标系 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ 中的坐标时 (coordinate time): 坐标域中任一点的 x^0 值

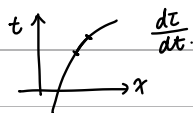
惯性系 (定义域为全体 $\mathbb{R}^4$) 坐标时叫惯性坐标时.

指定世界线 $\rightarrow$ 固有时 指定坐标域 $\rightarrow$ 坐标时

Prop. 6-1-1 设 $L(\tau)$ 是某质点的世界线, τ 为固有时, t 为惯性系中的坐标时

则 $dt/d\tau = \gamma_u = (1-u^2)^{-1/2}$ u 是质点相对于 Σ 的速率

Pf: $dt^2 - d\tau^2 = (1-u^2)dt^2$



$$dt^2/d\tau^2 = \frac{1}{1-u^2} \equiv \gamma_u^2 \Rightarrow dt/d\tau = (1-u^2)^{-1/2} \equiv \gamma_u.$$

Note: 惯性观者在本惯性系中的坐标时等于自己的固有时 $dt = d\tau$ ($u=0$).

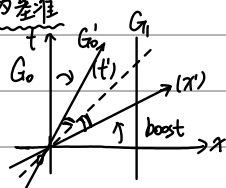
6.1.5 时空图

G_0, G_1 是惯性坐标系中的两个惯性观者

G_0' 是惯性参考系中的惯性观者, Σ' 相对于 Σ 速率 v 行 c .

闵氏时空的时空图中类时直线为测地线, 对应于某个惯性参考系中的一个惯性观者.

以惯性系 Σ 作为基准



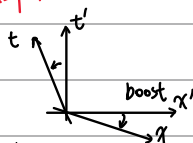
竖直线表明惯性观者相对于惯性系 S 静止, 斜直线表明惯性观者相对于惯性系 S' 匀速运动

洛伦兹变换 $t' = \gamma(t - vx)$ $x' = \gamma(x - vt)$ G_0 世界线 $\begin{cases} x' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{\gamma}x$

- ① 欧氏度规考虑 x' 轴与 t' 轴不垂直 [基坐标系选取]. $t' = 0 \Rightarrow t = vx$
- ② 闵氏度规考虑 洛伦兹系 $\{t', x', y', z'\}$ 满足 $\eta_{ab} (\frac{\partial t}{\partial t'})^a (\frac{\partial x}{\partial t'})^b = 0$ x' 轴与 t' 轴正交

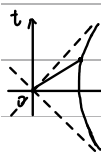
惯性系与 S' 的平权性没有被破坏.

变换基到惯性系为 S'



① 正交性 ② 曲线长度.

"时空图的欺骗"



OP线长 $l_{op} = \sqrt{-t^2 + x^2}$

双曲线 $-t^2 + x^2 = K$ (常数) 各点与O所连直线段等长. (非圆)
 标准曲线.

· 1+1 维时空图 $\leftrightarrow$ 世界线

3+1 维时空图 $\xrightarrow[\text{约去}]{\text{对称性}}$ 2+1 维时空图 $\leftrightarrow$ 世界面 (world sheet).

· 闵氏时空的惯性参考系

[S 系在 t 时刻的全空间]

与 S 中所看惯性观者世界线正交的3维平面(超曲面) — 同时面.

$dt=0$ 诱导线元 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

— 惯性系 S 在任时刻的空间是3维欧氏空间

另一惯性系 S' 同时面与 S 同时面不同 $\rightarrow$ 同时性的相对性

6.1.6 狭义相对论与牛顿时空(非狭义相对论时空)结构的对比

狭义相对论: 4维闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab}) \rightarrow$ 时间和空间是派生的相对概念

"派生": 参考系将时空作3+1分解.

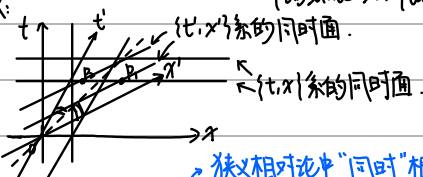
"相对": 同一时空有多种不同的3+1分解方案

牛顿时空：时空流形为 $\mathbb{R}^4$ (仅能配导数 ∂_a)

绝对时间 (absolute time) $t: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$.

等 t 面 Σ_t ($\mathbb{R}^4$ 中的超曲面) 称为绝对同时面

(absolute simultaneity surface).



P_1, P_2 在 $\{t, x\}$ 系中同时
 $\{t', x'\}$ 系中不同时

狭义相对论中“同时”概念是相对的, 是参考系依赖的.
牛顿理论中“同时”概念是绝对的, 不依赖参考系的.

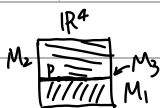
事件因果联系 $p \in \mathbb{R}^4$ 3个互不相交的子集 $\mathbb{R}^4 - \{p\} = M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

$M_1 = \{q \in \mathbb{R}^4 - \{p\} \mid \text{存在先经历事件 } q \text{ 后经历事件 } p \text{ 的观者}\}$

$M_2 = \{q \in \mathbb{R}^4 - \{p\} \mid \text{存在先经历事件 } p \text{ 后经历事件 } q \text{ 的观者}\}$.

$M_3 = \{q \in \mathbb{R}^4 - \{p\} \mid \text{不存在既经历事件 } q \text{ 又经历事件 } p \text{ 的观者}\}$.

Newtonian:



SR:



从 p 到 q 的测地线切矢 T^a 为指向未来 (future-directed) 类时矢量

从 p 到 q 的测地线切矢 T^a 为指向过去 (past-directed) 类时矢量

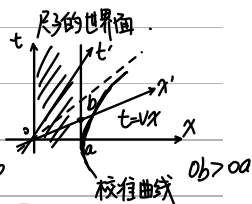
§6.2 典型效应分析 Analysis of typical effects.

6.2.1 R 收缩效应.

4维语言中R3是二维对象 $\mathcal{R}$ 为基准系

长度: 某一惯性系中时刻 t 处世界面在同时间上截出的线段长

$\mathcal{R}$ 系中 R 在 $t=0$ 时刻的长度为 $0a$, $\mathcal{R}'$ 系中 R 在 $t'=0$ 时刻的长度为 $0b$

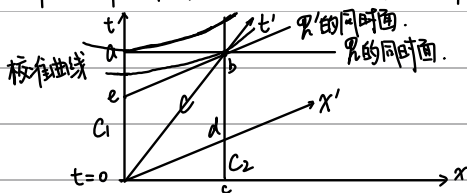


线长是绝对量, 与坐标系无关. $l_{0a} = \sqrt{-0 + x_a^2} = x_a$ $l_{0b} = \sqrt{-t_b^2 + x_b^2} = \sqrt{x_b^2 - v^2 x_b^2} = \sqrt{1-v^2} x_a$

$$l_{0b} = \sqrt{1-v^2} l_{0a} \quad v < 1 \text{ 故 } l_{0b} < l_{0a} \quad \text{动尺收缩 } l_{0b} = \gamma^{-1} l_{0a}.$$

6.2.2 钟慢效应.

考虑惯性系中的两个标准钟 C_1, C_2 和惯性系 $\mathcal{R}'$ 中的标准钟 C' C' 钟相对于 C_1, C_2 以



速度 u 运动

从 $\mathcal{R}$ 系角度 a 时刻 C_1 钟读数为 $l_{0a} = \sqrt{-t_a^2} = t_a$ C_2 钟读数为 $l_{0c} = l_{0a} = t_a$

$$C' \text{ 钟读数为 } l_{0b} = \sqrt{x_b^2 - t_b^2} = \sqrt{1-v^2} t_a \quad v < 1$$

$$\text{故 } l_{0b} < l_{0a} \quad \text{动钟变慢 } l_{0b} = \gamma^{-1} l_{0a}$$

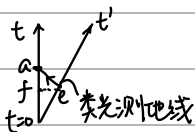
从 $\mathcal{R}'$ 系角度 $t=0$ 时刻 C_2 钟已有读数 $l_{cd} = \delta > 0$.

b 时刻 应比较 C_2 的 $l_{cb} - \delta = l_{bd}$ 与 C' 的 l_{0b}

$$\text{故 } l_{0b} > l_{bd} \quad \text{动钟变慢}$$

· 比钟方式 [无需借助第三只钟].

④ 光子从 e 经类光测地线到达 a , $l_{0e} < l_{0a}$ 动钟变慢程度更甚



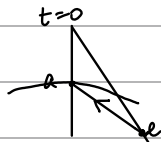
$$l_{oa} = \tau \quad l_{oe} = \tau' \quad l_{af} = p \quad l_{fa} = q = l_{fe}.$$

$$\left. \begin{array}{l} ① \tau = p + q \\ ② p = \gamma \tau' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \tau' \\ ③ u = \frac{q}{p} \end{array} \right\} \tau' = \frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u} \tau.$$

因讨论动钟变慢的问题时的比钟方法。

② 光子从e点经类光测地线到达a 同时到达 $t=0$

动钟较快。



讨论比钟问题时必须事先说明比钟方式的每一细节

6.2.3 孪子佯谬 (twin paradox).

甲 - 守在家中 (惯性观者 → 世界线竖直, 为测地线)
乙 - 太空遨游 (非惯性观者 → 非测地线)
孪子效应的时空图。 P 分手 Q 重逢

⇒ 甲乙两线介于 P, Q 之间的固有时/线长的比较问题

问在时空中两点之间类时测地线是该两点间类时线的最长者 $l_P > l_Q$

故重逢时乙比甲年轻。 特例: $l_P = \gamma l_Q > l_Q$

争论代表: McCrea vs Dingle.

实验验证: 铯原子钟 Hafele and Keating (1972).

常见问题:

① 钟慢效应的结论是对双方平等, 而孪子效应的结论对双方不平等 (都认为乙比甲年轻)

答: 钟慢效应前提是两个观者都做惯性运动 [惯性系平权].

孪子效应中有一方不做惯性运动 (世界线非测地线), 否则分手后不会重逢

例如《星际穿越》库珀与墨菲父女

② 孪子效应的结论是做加速运动的兄弟较年轻。加速度是相对的，会导致乙比甲年轻？
认为

答：3维加速度是相对的 非惯性运动 $\Leftrightarrow$ 加速运动 (4维加速度)

4维加速度是绝对的 (与观者、参考系及坐标系等人为因素无关) 4维加速度为零

惯性运动与非惯性运动的概念是绝对的：质点做惯性运动 $\Leftrightarrow$ 世界线为测地线

③ 孪子效应属于广义相对论，仅在狭义相对论范畴内无法解释。

答：错误 固有时间

① 无需利用非惯性系计算，比较世界线长 (与坐标系无关的几何量) 即可

② 狭义相对论物理背景为4维闵氏时空。

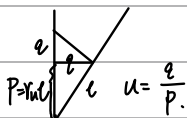
广义相对论物理背景为弯曲时空 (引力效应)。

加速运动不会导致时空弯曲。

—— 非惯性坐标系的克氏符 $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}$ 不全为零 $\neq$ 时空弯曲。

Note: 爱因斯坦转盘问题。

Ref: Rindler, Sachs & Wu (黄书恒)。



技巧：“横平竖直”测得的“直角”边线长是斜边长的 $\gamma_u = (1-u^2)^{-1/2} (>1)$ 倍。

6.2.4 车库佯谬 (garage paradox)

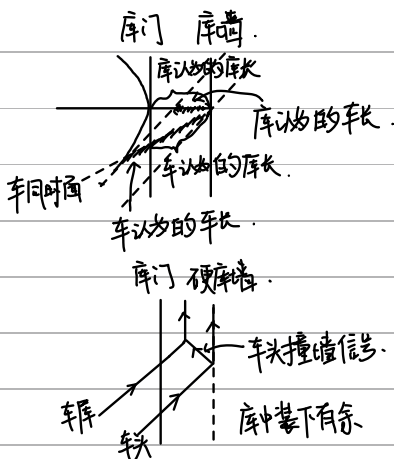
汽车与车库静长相等，汽车加速进库：

司机：动库变短，车放不下

车库：动车收缩，放下有余

同时性的相对性导致结论的相对性

“究竟能否装下”绝对性问题无意义



§6.3 质点运动学和动力学. Kinematics and Dynamics of particle.

伽利略协变性: 物理定律的数学表达式在伽利略变换下不变 (牛顿力学).

洛伦兹协变性 (Lorentzian covariant): 物理定律的数学表达式在洛伦兹变换下不变

· 动量守恒律.

牛顿力学: 动量 $\vec{p}$ 质量 m 速度 $\vec{u}$ $\vec{p} := m\vec{u}$

所受的力 $\vec{f}$ 为动量变化率 $\vec{f} := \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\Rightarrow$ 牛顿第二定律 $\vec{f} = m \frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a}$

牛顿第三定律. $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$ 总动量守恒.

坐标变换 $\vec{p}' = m\vec{u}' = m(\vec{u} - \vec{v})$ 故 $\frac{d}{dt}(\vec{p}' + \vec{p}') = 0$ 满足伽利略协变性.

狭义相对论中 动量 $\vec{p}$ 不具备洛伦兹协变性. —

	碰前	碰后
质系	1 $\xrightarrow{\vec{u}}$ 2 $\xleftarrow{-\vec{u}}$	● 不动
质系	1 $\xrightarrow{\vec{u}}$ 2 $\xleftarrow{-\vec{u}}$	● 不动

① 伽利略变换. $u = u' + v = 2v$

$p_{前} = mu = 2mv$ $p_{后} = m_{总}v = 2mv$ 守恒.

② 洛伦兹变换. $u = \frac{u' + v}{1 + u'v} = \frac{2v}{1 + v^2}$

$p_{前} = mu = \frac{2mv}{1 + v^2}$ $p_{后} = m_{总}v = 2mv$ 不守恒.

$\Rightarrow$ 修改动量定义 (质量随速率增大而增大) $m \rightarrow m_u$ $\vec{p} := m_u \vec{u}$ m_u 为运动质量

$p_{前} = \frac{2m_u v}{1 + v^2} \neq p_{后} = M_0 v$. 总质量守恒 $M_0 = m_u + m_0$ m_0 为静质量.

$\frac{2m_u v}{1 + v^2} = (m_u + m_0)v \Rightarrow m_0 = \frac{1 - v^2}{1 + v^2} m_u$

$1 - u^2 = \left(\frac{1 - v^2}{1 + v^2}\right)^2$ $m_0 = m_u \sqrt{1 - u^2}$ 或 $m_u = \frac{m_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$ $\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$

三维动量 $\vec{p} := m_u \vec{u} = \gamma_u m_0 \vec{u}$

力 $\vec{f} := \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{f}' := \frac{d\vec{p}'}{dt'}$ 惯性系依赖, 两者之间存在变换律

· 能量守恒律. 质量守恒律.

动能 E_k 定义 ① 质点静止 $u=0$ 时 $E_k=0$ ② 力的功率为动能的时间变化率 $\vec{f} \cdot \vec{u} = \frac{dE_k}{dt}$

$$\frac{dE_k}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{u} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \frac{d(m_u \vec{u})}{dt} = m_u \vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \cdot \vec{u} \frac{dm_u}{dt} = m_u u \frac{du}{dt} + u^2 \frac{dm_u}{dt}$$

$$\text{其中 } \frac{dm_u}{dt} = \frac{d}{dt} [m_0 (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{2} m_0 (1-u^2)^{-\frac{3}{2}} (-2u \frac{du}{dt}) = \frac{1}{1-u^2} m_u u \frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_k}{dt} = (1-u^2) \frac{dm_u}{dt} + u^2 \frac{dm_u}{dt} = \frac{dm_u}{dt} \quad \left[\frac{dE_k}{dt} = c^2 \frac{dm_u}{dt} \right]$$

$$E_k(u) - E_k(0) = c^2 \int_{m_0}^{m_u} dm = m_u c^2 - m_0 c^2$$

质点在速率为 u 的总能量 $E = m_u c^2 = E_k(u) + m_0 c^2$. 总能量 E (运动质量) 守恒

质点在速率为 u 的动能 $E_k(u)$ 质点静能 $E_0 = m_0 c^2$

(rest energy).

$$\text{e.g. } m_0 = 1g \quad m_0 c^2 = 1 \times 10^{-3} \times (3 \times 10^8)^2 = 9 \times 10^{13} \text{ J} \approx \text{广岛原子弹释放的能量}$$

静能存储的位置 ① 组成物质的分子、原子的热运动能量 (内能).

② 分子之间、原子间的结合能

原子核裂变为两块时 ③ 原子核周围电子激发态能

M_0 为原子核静质量. ④ 原子核内部的结合能 (binding energy)

$$M_0 c^2 = \sum_{i=1}^n E_{ki} + \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 \quad \text{静能不守恒, 总能量守恒} \quad M c^2 = m_1 c^2 + m_2 c^2$$

$$\sum_{i=1}^n E_{ki} = M_0 c^2 - \sum_{i=1}^n m_{0i} c^2 \quad \text{裂变释放的能量}$$

$$\Delta m_0 = M_0 - (m_{01} + m_{02}) \quad \text{质量亏损 (mass effect)}.$$

⑤ 原子核中基本粒子的静能

(无静能).

应用: 电子 (electron) 与正电子 (positron) 湮灭出两个光子.

$$\text{总能量 } E_u = m_u c^2 \quad \text{运动质量 } m_u \quad \text{守恒} \rightarrow E \equiv E_u = m_u c^2 \quad \text{conserved}$$

$$\text{静能 } E_0 = m_0 c^2 \quad \text{静质量 } m_0 \quad \text{不守恒} \rightarrow m \equiv m_0 \quad \text{invariant}$$

$$\Rightarrow E = \gamma m_0 c^2 \quad \text{其中 } \gamma = (1-u^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

守恒量: 在物理过程中保持常值 (不随时间而变) 的量.

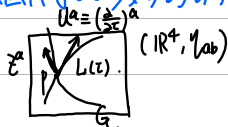
不变量: 不随坐标系、参考系和观察者等人为因素而变的量.

• 4维语言.

Def 1 质点的4维速度(4速, 4-velocity) U^a 是质点世界线(以固有时 τ 为参数)的切矢

即 $U^a := (\frac{dx^a}{d\tau})^a$

3速 $\vec{u} := \frac{d\vec{r}}{dt}$. ($\vec{r}$ 为位矢)



Prop 6-3-1 令 $U_a \equiv g_{ab} U^b$ 则 $U^a U_a = -1$

Pf: 固有时 τ 是类时曲线的线长参数, 而以线长为参数的切矢有单位长

质点的世界线是绝对的 [不依赖于参考系, 坐标系选取]. $\Rightarrow$ 4速(切矢)也是绝对的

$\Rightarrow$ 定义质点在时刻 p 相对于观者 G 的3速

① 直接测量——当时当地观测 (local measurement): 对发生在观者世界线上的事件的观测

参考系由无处不在的观者组成, 发生在别处的事件由别处的观者观测

② 瞬时观者 (instantaneous observer): 事件发生的时空点 p 及 p 点处一个(指向未来的)类时

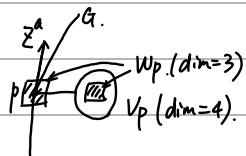
(p, Z^a) .

单位矢量 Z^a 构成

① p 点的切空间 V_p 是4维的.

p 点处观者 G 所感受到的所有空间矢量集合 W_p 是3维的

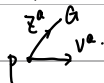
例: 惯性系中的一个惯性观者 G . (非惯性观者同理)



G 的同时面 Σ_p 是在 p 的3维空间(正交于 G 所有惯性观者世界线)

$\Rightarrow W_p = \{w^a \in V_p \mid g_{ab} w^a Z^b = 0\}$. 为切空间 V_p 的子空间.

$w_p \in W_p$ 是观者 G 的空间矢量 (spatial vector).



空间矢量 $g_{ab} V^a Z^b = 0$ 相对的. 取决于观者 G 的4速 Z^a
类空矢量 $g_{ab} V^a V^b > 0$ 绝对的.

p 点的 g_{ab} 在 W_p 上的诱导度规 $h_{ab} = g_{ab} + Z_a Z_b$.

$V_p \rightarrow W_p$ 的投影映射 $h^a_b = \delta^a_b + Z^a Z_b$

$h^a_b V^b \in W_p$ 是 $V^a \in V_p$ 在 W_p 上的投影

惯性观者 G (t, x) 质点 L 依坐标基底 $\{(\frac{\partial}{\partial t})^a, (\frac{\partial}{\partial x})^b\}$ 展开. $U^a = \frac{dt}{d\tau} U^t = \frac{dx^i}{d\tau} U^i$

$\{t, x^i\}$. $U^a = (\frac{\partial}{\partial \tau})^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a \frac{dt}{d\tau} + (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \frac{dx^i}{d\tau}$. 空间投影为 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a \frac{dx^i}{d\tau} = h^a_b U^b$

$U^0 d\tau = (\frac{\partial}{\partial t})^a dt + (\frac{\partial}{\partial x^i})^a dx^i$ $P \rightarrow q$ G 经历时间为 $d\tau$ L 空间位移 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a dx^i$

质点 L 相对于观者 G 的 3 速 $u^a := (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \frac{dx^i}{d\tau} = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \frac{dx^i/d\tau}{dt/d\tau}$

非惯性运动. 非惯性观者. $Y = \frac{dt}{d\tau}$ $-Z_a U^a = -\eta_{ab} Z^b U^a = -\eta_{\mu\nu} Z^\nu U^\mu = -\eta_{00} Z^0 U^0 = U^0 = \frac{dt}{d\tau}$

$\Rightarrow Y = -Z_a U^a$ 为两 4 速 Z^a 与 U^a 内积倒数.

$u^a = \frac{h^a_b U^b}{Y}$ 为质点在 P 处的 3 速的空间投影与观者 G 和质点 L 的 4 速内积倒数之比

观者 G 可以为非惯性观者, 重要的仅在于 G 的世界线在 P 点的切矢 (4 速) $Z^a|_P$.

质点 L 可作非惯性运动, 重要的仅在于 L 的世界线在 P 点的切矢 (4 速) $U^a|_P$.

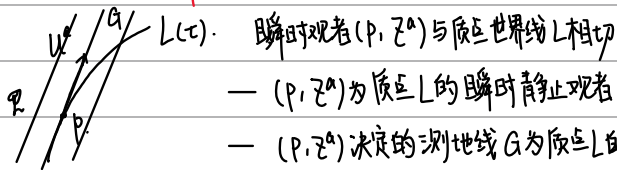
Def 2 一个瞬时惯性观者 (P, Z^a) 测量质点 L 的 3 速 / L 相对于惯性参考系 $\mathcal{R}$ 的 3 速为

$$u^a = \frac{h^a_b U^b}{Y} \quad \text{其中 } h^a_b = \delta^a_b + Z^a Z_b, \quad Y = -Z_a U^a.$$

Def 3 质点对该瞬时观者的 3 速率是质点对瞬时观者的 3 速度矢量 u^a 的长度

$$u = \sqrt{u^a u_a} \quad \text{其中 } U_a := \eta_{ab} U^b = h_{ab} U^b.$$

质点的 3 速率 u 为亚光速 $u < 1 \Leftrightarrow \eta_{cd} U^c U^d < 0$ 质点世界线为类时线.



瞬时观者 (P, Z^a) 与质点世界线 L 相切

— (P, Z^a) 为质点 L 的瞬时静止观者.

— (P, Z^a) 决定的测地线 G 为质点 L 的瞬时静止惯性观者

— G 所属的惯性参考系为 L 在 P 时刻的瞬时静止惯性参考系

— $\mathcal{R}$ 内任一惯性坐标为 L 在 P 时刻的瞬时静止惯性坐标 $\{t, x^i\}$

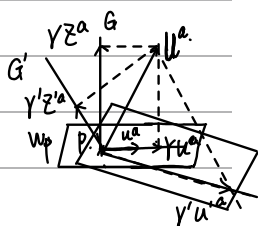
Prop 6-3-2 质点的 4 速可借瞬时观者 (P, Z^a) 做 3+1 分解: $U^a = Y(Z^a + u^a)$

其中 u^a 为质点相对于瞬时观者的 3 速, $Y = -Z^a U_a$.

$$\text{Pf: } \nu U^a = h^a_b U^b = (\delta^a_b + Z^a Z_b) U^b = U^a - Y Z^a.$$

$$\text{Note: } U^a = Y(Z^a + u^a) = Y'(Z'^a + u'^a).$$

4 速 U^a 是绝对的, 3+1 分解是相对的 (与观者、坐标有关).

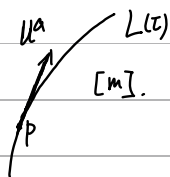


Def 4. 设质点的静质量为 m , 4速为 U^a , 则其4动量 (4-momentum) 定义为 $p^a := mU^a$

Prop. 6-3-3 质点的4动量可借瞬时观者 $(P, \hat{e}^a)$ 做3+1分解. $p^a = E\hat{e}^a + p_a$.

Pf: $p^a = m\gamma(\hat{e}^a + u^a) = E\hat{e}^a + p_a$.

$m\gamma = m_u = E \quad \vec{p} = m_u \vec{u} = \gamma m \vec{u} \quad (p^a \text{ 为3动量}).$



4动量 p^a 的空间分量和时间分量分别是3动量 p_a 和能量 E .

$E = -p^a \hat{e}_a.$

$p^a \hat{e}_a = 0$ 正交

$-m^2 = mU^a mU_a = p^a p_a = (E\hat{e}^a + p_a)(E\hat{e}^a + p_a) = -E^2 + p^a p_a = -E^2 + p^2.$

$\star E^2 = m^2 + p^2 \quad \text{即} \quad E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2.$

Def 5 质点的4加速 (4-acceleration) 定义为 $A^a := U^b \partial_b U^a$.

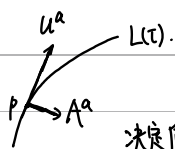
其中 U^a 为质点的4速, ∂_b 是与 η_{ab} 适配的导数算符 $\partial_a \eta_{bc} = 0$

① 4加速是绝对的.

② 4加速为零 $A^a = 0 \Leftrightarrow U^b \partial_b U^a = 0$ 世界线为测地线, 质点做惯性运动

Prop 6-3-4 质点世界线上各点的4加速 A^a 与4速度 U^a 正交, 即 $A^a U_a = \eta_{ab} A^a U^b = 0$

Pf: $U_a A^a = U_a U^b \partial_b U^a = \frac{1}{2} U^b \partial_b (U_a U^a) = 0.$



对定义域在线上的函数 $U_a U^a = -1$ 沿着线的切矢 U^a 求导

决定质点 L 的3加速应比较 L 在 P 点及世界上与 P 紧邻的 P' 的3速

$\Rightarrow$ 借用坐标系: L 在任一点 P 的3速 U^a 在惯性坐标系下的分量. $U^i = \frac{dx^i}{dt}$

Def 6 设质点世界线 $L(t)$ 在惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 的系数表达为 $L: t = t(t), x^i = x^i(t).$

则 L 相对于该系的3加速定义为 $a^a := \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \frac{dx^i}{dt}$

其中 $x^i(t)$ 是 $x^i = x^i(t)$ 与 $t = t(t)$ 给成的函数 $x^i = x^i(t).$

Q: 4加速 A^a 与标架转动之间有无关系

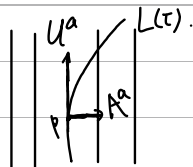
Prop 6-3-5 质点的 4 加速 A^a 在惯性系的分量为

见为瞬时静止惯性标系

$$A^0 = \gamma^4 \vec{u} \cdot \vec{a} \quad A^i = \gamma^2 a^i + \gamma^4 (\vec{u} \cdot \vec{a}) u^i$$

其中 $\vec{u}$ 和 $\vec{a}$ 为质点相对于观系的 3 速和 3 加速 $\gamma = (1 - u^2)^{-1/2}$

$$u = (\vec{u} \cdot \vec{u})^{1/2}$$



Prop 6-3-6 质点的 4 加速等于它相对于瞬时静止惯性标系的 3 加速. ($\vec{u} = 0$).

$$A^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a A^0 + \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a A^i \quad A^a = (A^0, A^i) = (0, \vec{a})$$

Def 7 质点所受的 4 力 (4-force) 定义为 $F^a := U^b \partial_b p^a$. [F^a 具体标 $\rightarrow$ 质点的相对论

其中 U^a 和 p^a 是质点的 4 速和 4 动量.

运动方程.]

$F^a = U^b \partial_b (m U^a) = m U^b \partial_b U^a = m A^a$ 在静质量不变 ($\frac{dm}{dt} = 0$) 的条件下成立.

Prop. 6-3-7 质点所受 4 力在惯性标系 (x^μ) 的空间分量 F^i ($i=1,2,3$) 等于它所受 3 力对应分量 f^i 的 γ 倍

时间分量 F^0 等于 3 力的功率 $f \cdot \vec{u}$ 的 γ 倍.

$$F^i = \gamma f^i \quad F^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u} \quad \text{其中 } \gamma = (1 - u^2)^{-1/2} \quad u \text{ 是质点对该系的 3 速 } \vec{u} \text{ 的大小}$$

$$pf: F^a = F^a (dx^\mu)_a = (dx^\mu)_a U^b \partial_b p^a = U^b \partial_b [(dx^\mu)_a p^a] = U^b \partial_b p^\mu. \quad p^a = E \bar{e}^a + p^a$$

$$\mu=i \quad F^i = U^b \partial_b p^i = U^b \partial_b p^i = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \partial_b p^i = \frac{dp^i}{dt} = \frac{dp^i}{dt} \frac{dt}{dx} = \gamma f^i$$

$$\mu=0 \quad F^0 = U^b \partial_b p^0 = U^b \partial_b E = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b \partial_b E = \frac{dE}{dx} = \frac{dE}{dt} \frac{dt}{dx} = \gamma \frac{dE}{dt} = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}$$

$$\star U^a = \gamma (\bar{e}^a + u^a) \quad p^a = E \bar{e}^a + p^a \quad A^a \rightarrow a^a \quad F^a \rightarrow f^a$$

被分解的对象是绝对的, 分解所得的量是相对的 (依赖于观者/坐标分解的方法)

• 标架. $(e_0)^a \equiv \bar{e}^a +$ 世界线上的三个正交归一矢量场 $\{(e_i)^a \in W_p, i=1,2,3\}$ 为 3 标架 (triad)

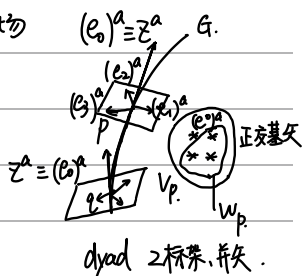
$\Rightarrow$ 观者世界线上的四个正交归一矢量场 — 4 维标架 (tetrad) 场

定义在 G 世界线上.

任何时空点的任何张量都可用该点的 4 标架作为基底表出

— 观者 = 一条定义了 4 标架场的类时世界线.

$$\text{瞬时观者} = (p, (e_a)^a) \quad (e_0)^a \equiv \bar{e}^a$$



[做惯性运动的无自转观者].

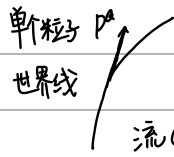
惯性观者 = ① 世界线为类时测地线 ② 4标架不变 (例如惯性坐标系中的惯性坐标基矢)

§6.4 连续介质的能动张量. Energy-momentum tensor of Continuous Media.

连续分布的介质: 宏观的统计平均效应.

空间各点的能量密度. 动量密度. 能流密度. 动量流密度等.

(energy density) (momentum density) (energy flux) (momentum flux).



连续介质 + 电磁场 $\rightarrow$ 物质场 (matter field)

E 为能量 $E = \gamma m c^2$.

设宏观小体积 V 内的静质量为 m , 相对于某惯性系的 3 速为 $\vec{u}$. 3 动量 $\vec{p} = \gamma m \vec{u} = (E/c^2) \vec{u}$

$\vec{p} = \frac{1}{V} \int_V \vec{p} dV$ 动量密度 $\frac{\vec{p}}{V} = \frac{1}{c} \frac{E}{V} \times \vec{u}$. [流密度] = 荷密度 $\rho \times \vec{u}$.

3 动量密度 = 能流密度. ($c=1$). [坡印亭矢量].

能量-动量张量 (energy-momentum tensor) T_{ab} .

包含各种 3 维密度.

性质: 1. $T_{ab} = T_{ba}$ 对称

2. 孤立体系/任何封闭物质场 $\partial_a T^{ab} = 0$ [体现能量守恒. 3 动量守恒. 角动量守恒].

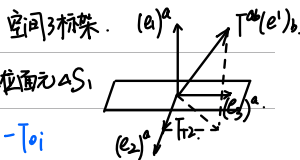
3. 对任意瞬时观者 $(p_i, (e_i)^a)$ $(e_i)^a \equiv \dot{z}^a$

(a) 该观者测得的能量密度 $\mu \equiv T_{ab} \dot{z}^a \dot{z}^b = T_{00}$

空间单位面元 ΔS_i

(b) 该观者测得的 3 动量密度 (能流密度) $W_i \equiv -T_{ab} \dot{z}^a (e_i)^b = -T_{0i}$

(c) 该观者测得的 3 应力张量 (stress tensor) $T_{ij} \equiv T_{ab} (e_i)^a (e_j)^b$



$T_{ij} = T_{ij} \Delta S_i$ - 侧对另一侧的力的 j 分量 ($i, j=1, 2, 3$).

$\hat{T}_{ab} \equiv T_{ij} (e_i)^a (e_j)^b$. $T_{ij} = \hat{T}^{ab} (e_i)^a (e_j)^b = [\hat{T}^{ab} (e_j)^b] (e_i)^a$.

$\hat{T}^{ab} (e_j)^b$ - ΔS_i - 侧对另一侧的力. [相互作用实质是动量交换].

— 单位时间沿 $(e_i)^a$ 方向穿过 ΔS_i 的 3 动量

— 沿 $(e_i)^a$ 方向的 3 动量流密度 (矢量) 3 动量流密度 (张量) $\hat{T}^{ab} \equiv T_{ij} (e_i)^a (e_j)^b$.

Def 1 $W^a := -T^a_b \bar{z}^b$ 为瞬时观者 $(p, \bar{z}^a)$ 测得的 4 动量密度.

Prop. 6-4-1 瞬时观者 $(p, (e_\mu)^a), (e_0)^a = \bar{z}^a$ 测得的 4 动量密度可做如下分解

$W^a = \mu \bar{z}^a + w^a$ 其中 μ 和 $w^a \equiv w^i (e_i)^a$ 分别是该观者测得的能量密度和 3 动量密度.

w^a 是该观者的空间矢量

Pf: W^a 在标架 $\{(e_\mu)^a\}$ 上的分量为 $(e_0)_a = \bar{z}_a = -(e^0)_a, (e^i)^b = (e_i)^b$

$$W^0 = W^a (e_0)_a = -T^a_b \bar{z}^b (-\bar{z}_a) = T_{ab} \bar{z}^b \bar{z}^a = \mu. \quad (=w^i)$$

$$W^i = W^a (e_i)_a = -T^a_b \bar{z}^b (e_i)_a = -T_{ab} \bar{z}^b (e_i)^a \stackrel{a \leftrightarrow b}{=} -T_{ab} \bar{z}^a (e_i)^b = -T_{ab} \bar{z}^a (e_i)^b = w_i$$

故 $W^a = \mu (e_0)^a + w^i (e_i)^a = \mu \bar{z}^a + w^a$. W^a 依赖于观者. 4 动量密度

类比 $p^a = E(e_0)^a + p_i (e_i)^a = E \bar{z}^a + p_a$. p^a 与观者无关 4 动量.

Prop. 6-4-2 $\partial_a T_{ab} = 0$ 守恒方程 $\Rightarrow$ 能量守恒. 3 维动量守恒. 角动量守恒

(conservation of energy, 3-momentum and angular momentum).

Pf: 惯性系坐标 $\{t, x, y, z\}$. 令 $\bar{z}^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ $\partial_a \bar{z}^b = \partial_a (\frac{\partial}{\partial t})^b = 0$

$$\bar{z}^a \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad W^a \equiv -T^a_b \bar{z}^b \quad \partial_a W^a = -\partial_a (T^a_b \bar{z}^b) = -\bar{z}^b \partial_a T^a_b = -\bar{z}^b \underbrace{\partial_a T^a_b}_{=0} = 0.$$

$$\Rightarrow \partial_a W^a = 0 = \partial_\mu W^\mu = \partial_0 W^0 + \partial_i W^i = \partial_0 \mu + \partial_i w^i = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$$

$$T_{ab} \text{ 连续性方程 } \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad [\text{电荷守恒}] \Leftrightarrow \frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{I} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{故 能量守恒 } \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{w} = 0$$

§6.5 理想流体动力学. Perfect fluid dynamics

Def 1 理想流体 (perfect fluid) 是一种物质场, 其能动张量可表为

$$T_{ab} = \mu U_a U_b + p (\eta_{ab} + U_a U_b) = (\mu + p) U_a U_b + p \eta_{ab}$$

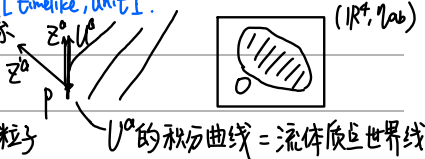
其中 μ, p 是函数 (标量场). U^a 是矢量场, 满足 $U^a U_a = -1$ 被称为理想流体的4速场

流体本身作为参考系 [timelike, unit].

连续介质中 流体质点 (体元): 宏观上近似于一点,

对粒子的微观离散结构

微观上包含无数多微观粒子



做统计平均处理后的模型.

① 相对于流体参考系静止 $U^a = V(\xi^a + u^a) = V(U^a + u^a)$

$$V = -\xi^a U_a = -U^a U_a = 1 \Rightarrow 3\text{速 } u^a = 0$$

设瞬时观者 $(p, (e_a)^a)$

$\Rightarrow$ 瞬时静止观者 (rest observer).

$$4\text{速 } (e_0)^a = U^a|_p.$$

② 其他参考系认为他随流体一起运动

$\Rightarrow$ 瞬时运动观者或共动观者 (comoving observer).

$$T_{ab} \xi^a \xi^b = T_{ab} (e_0)^a (e_0)^b = T_{ab} U^a U^b = (\mu + p) (-1)(-1) - p = \mu.$$

$$(e_i)^a U_a = 0$$

由共动观者测得的能量密度 [固有能量密度]

$$T_{ab} (e_i)^a (e_j)^b = 0 + p \eta_{ab} (e_i)^a (e_j)^b = p \delta_{ij} \quad (p, p_p)$$

由共动观者测得的应力张量.

[各向同性参考系].

① 只有正向压力 (压强) 而无切向应力

各向同性: 存在一个参考系 (观者)

② $T_{11} = T_{22} = T_{33} = p$ + 共动观者3标架的任意性

认为其各向同性.

$\Rightarrow$ 压强是各向同性的 (isotropic)

$$-T_{ab} \xi^a (e_i)^b = -T_{ab} (e_0)^a (e_i)^b = 0 = w_i$$

由共动观者测得的能流密度. (没有热传导).

U^a 是所有流体质点的4速构成的矢量场 (对粒子的微粒运动做统计平均处理)

$\Rightarrow$ 共动参考系 (静止参考系) 是以 U^a 为观者4速场的参考系.

·理想气体(作为理想流体的一例)。

压强 p 与能量密度 μ 的关系

$$p = \frac{1}{3} \mu \bar{u}^2 \quad \bar{u}^2 \text{ 是分子随机运动速率平方的平均}$$
$$\frac{p}{c^2} = \frac{1}{3} \mu \left(\frac{\bar{u}^2}{c^2} \right) \ll \mu.$$

IV 任意非相对论流体 (牛顿力学) $c=1$ 时 $p \ll \mu$ e.g. 飓风 $\frac{p}{\mu} \sim 10^{-12}$ 地球 $\frac{p}{\mu} \sim 10^{-10}$

IV 相对论流体 (blackbody / thermal radiation)

e.g. 极端相对论理想流体 — 黑体辐射 (恒温箱内达到热平衡的电磁辐射) $\bar{u}^2 = 1$.

与箱子相对静止的参考系为流体的共动系, 且是各向同性参考系. [光子气 (photon gas)].

压强 p 与能量密度 μ 的关系 $p = \frac{1}{3} \mu$

* 箱中光子相对于各向同性参考系有沿各个方向, 充分紊乱的随机运动 $\Rightarrow$ 黑体辐射可作为理想流体

* 光子没有固有时 (类光曲线线长恒为零), 不能作为观者, 不可以组成参考系

·理想流体的动力学方程. 牛顿力学 $\rightarrow$ 相对论.

牛顿力学的理想流体

$$\begin{cases} \text{描述质量密度 } \mu \text{ 随时间变化率的连续性方程} & \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{u}) = 0 \\ \text{描述 3 速 } \vec{u} \text{ 随时间变化率的欧拉方程.} & -\vec{\nabla} p = \mu \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] \end{cases}$$

设理想流体同外界无相互作用, 则 $0 = \partial^a T_{ab} = U_a U_b \partial^a (\mu + p) + (\mu + p) (U^a \partial_a U_b + U_b \partial_a U^a) + \eta_{ab} \partial^a p$

$$4 \text{ 矢方程. } 0 = U_b U^a \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (U^a \partial_a U_b + U_b \partial_a U^a) + \partial_b p$$

在共动观者的时间和空间方向投影: $U^a U_a = -1$.

$$\otimes U^b \text{ 时间分量. } \Rightarrow 0 = U^b \partial^a T_{ab} = -U^a \partial_a (\mu + p) + (\mu + p) (U^b U^a \partial_a U_b - \partial_a U^a) + \cancel{U^b \partial_b p}.$$

$$\text{II } U^a \partial_a \mu + (\mu + p) \partial_a U^a = 0 \quad \begin{matrix} -1 \\ = -1 \end{matrix} = \frac{1}{2} U^a \partial_a (U^b U_b) = 0$$

$$\otimes h^b_c \equiv \delta^b_c + U_c U^b \Rightarrow 0 = U_c U^a \partial_a (\mu + p) + U_c U^b U_b U^a \partial_a (\mu + p) = 0.$$

$$\begin{aligned} & + (\mu + p) (U^a \partial_a U_c + \cancel{U_c U^b U_b U^a \partial_a U^a} + U_c U^b U^a \partial_a U_b + \cancel{U_c U^b U_b \partial_a U^a}) \\ & + \partial_c p + U_c U^b \partial_b p. \end{aligned}$$

$$\text{III } (\mu + p) U^a \partial_a U_c + \partial_c p + U_c U^b \partial_b p = 0$$

尘埃 (dust): 压强为零 $p=0$ 的理想流体 $U^a \partial_a \mu + \mu \partial_a U^a = 0$ $\mu U^a \partial_a U^c = 0$

$U^a \partial_a U^c = 0$ 尘埃粒子的世界线为测地线 ($p=0$ 粒子不受力).

非相对论近似: 惯性坐标 $\{t, x^i\}$ u 为流体在该系中的速度, $\gamma = -(\frac{\partial}{\partial t})^a U_a \approx 1$.

$$U^a = \gamma \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a \right] \approx \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a \quad p \ll \mu \quad \mu + p \approx \mu.$$

$$\square \quad 0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \partial_a \mu + u^a \partial_a \mu + \mu \partial_a u^a = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \partial_a (\mu u^a) = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{u}).$$

$$\square \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c \quad 0 = \mu \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a + u^a \right] \partial_a \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_c + u_c \right] + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c \partial_c p \quad \partial_a \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_c = 0$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_c + u_c \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b + u^b \right] \partial_b p \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c u_c = u_i$$

$$0 = \mu \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \partial_a u_i + u^a \partial_a u_i \right] + \frac{\partial p}{\partial x^i} + u_i \frac{\partial p}{\partial t} + u_i u^j \frac{\partial p}{\partial x^j}$$

非相对论情况 $u \ll 1$. $u_i \frac{\partial p}{\partial t} \ll \frac{\partial p}{\partial x^i}$ $u_i u^j \frac{\partial p}{\partial x^j} \ll \frac{\partial p}{\partial x^i}$

$\rightarrow \mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u^a \partial_a u_i \right] = -\vec{\nabla} p$ 由此得到牛顿力学中的两个流体动力学方程.

§6.6 电动力学 Electrodynamics.

物质场 ① 电磁场 ② 全体带电质点组成的连续流体 (电磁场源并相互作用).

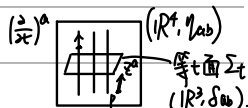
6.6.1 电磁场 (electromagnetic field). 和 4 电流密度

3 维语言 电场 $\vec{E}$, 磁场 $\vec{B}$. 背景时空 $(\mathbb{R}^3, g_{ab})$.

4 维语言 电磁场张量 F_{ab} [闵氏时空的 2 形式场 $F_{ab} = F_{[ab]}$ 满足 Maxwell 方程].

Def 1 瞬时观者 (p, Z^a) 测得的电场 E^a 和 磁场 B^a 由下式定义

$$E_a := F_{ab} Z^b \quad B_a := {}^* F_{ab} Z^b \quad (E^a := \eta^{ab} E_b \quad B^a := \eta^{ab} B_b).$$



其中 ${}^* F_{ab}$ 是 F_{ab} 的对偶微分形式, 也是 2 形式场.

4 维闵氏线元 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

3 维语言下的电动力学 — 利用惯性坐标 $\{t, x, y, z\}$.

在等时面 ($t = \text{const.}$) 上诱导的线元是 3 维欧氏

$$Z^a = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \quad E^a \rightarrow \vec{E} \quad B^a \rightarrow \vec{B}$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Prop 6-6-1 E^a 和 B^a 是瞬时观者 $(p, (e_a)^a)$. $(e_0)^a = z^a$ 的空间矢量, 且

$$E_1 = F_{10} \quad E_2 = F_{20} \quad E_3 = F_{30} \quad B_1 = F_{23} \quad B_2 = F_{31} \quad B_3 = F_{12}.$$

pf: $F_{ab} = F_{[ab]} \quad z^a z^b = z^a z^b \quad *F_{ab} = *F_{[ab]}$ 空间矢量.

$$\Rightarrow E_a z^a = F_{ab} z^b z^a = 0 \quad B_a z^a = -*F_{ab} z^b z^a = 0 \quad \text{即 } E^a \text{ 和 } B^a \text{ 是瞬时观者 } (p, z^a) \text{ 的}$$

$$E_i = E_a (e_i)^a = F_{ab} z^b (e_i)^a = F_{ab} (e_0)^b (e_i)^a = F_{i0} \quad \text{故 } E_1 = F_{10}, E_2 = F_{20}, E_3 = F_{30}$$

$$B_i = B_a (e_i)^a = -*F_{ab} z^b (e_i)^a = -\frac{1}{2} \epsilon_{abcd} F^{cd} (e_0)^b (e_i)^a \stackrel{a \leftrightarrow b}{=} \frac{1}{2} \epsilon_{0icd} F^{cd} = \frac{1}{2} \epsilon_{0ijk} F^{jk}$$

ϵ_{abcd} 为与度规 η_{ab} 逆画的体元 正交归一基下分量为 ± 1 .

$$\text{故 } B_1 = \frac{1}{2} (\epsilon_{0123} F^{23} + \epsilon_{0132} F^{32}) = F^{23} = F_{23}, \text{ 同理 } B_2 = F_{31}, B_3 = F_{12}$$

$$\Rightarrow F_{ab} \text{ 在观者的 4 标架 } (e_a)^a \text{ 的分量 } (F_{ab})_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

描述电磁场需要 6 个独立量.

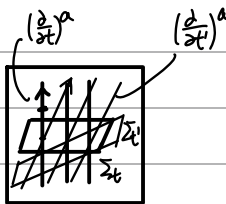
Prop 6-6-2 设惯性系 S 和 S' 由洛伦兹变换 $t = \gamma(t' + vx')$ $x = \gamma(x' + vt')$ $y = y'$ $z = z'$

相联系, 则两者测同一电磁场 F_{ab} 所得值 $(\vec{E}, \vec{B})$ 和 $(\vec{E}', \vec{B}')$

有如下关系: $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$.

$$E'_1 = E_1 \quad E'_2 = \gamma(E_2 - vB_3) \quad E'_3 = \gamma(E_3 + vB_2)$$

$$B'_1 = B_1 \quad B'_2 = \gamma(B_2 + vE_3) \quad B'_3 = \gamma(B_3 - vE_2)$$



pf: 张量变换 $F'_{ab} = \frac{\partial x^c}{\partial x'^a} \frac{\partial x^d}{\partial x'^b} F_{cd}$.

Prop. 6-6-3 设 p 点的两个瞬时观者 $(p, (e_a)^a)$ 和 $(p, (e'_a)^a)$ 的正交归一标架有如下联系:

$(e'_2)^a = (e_2)^a \quad (e'_3)^a = (e_3)^a$, 则两者测同一电磁场所得值 $(\vec{E}, \vec{B})$ 和 $(\vec{E}', \vec{B}')$ 也有 Prop 6-6-2 关系

其中 $v = -(e_0)^a (e'_0)_a$.

$$(e_0)^a = z^a \quad (e'_0)^a = z'^a$$

pf: 设惯性系 S 使某过 p 点的观者世界线以 $(e_0)^a$ 为 t 速

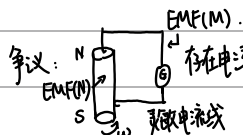
设惯性系 S' 使某过 p 点的观者世界线以 $(e'_0)^a$ 为 t' 速

$\rightarrow S$ 和 S' 关系为洛伦兹变换.

$\Rightarrow \vec{E}, \vec{B} \rightarrow \vec{E}', \vec{B}'$ 不对时惯性系成立.

"where is the site of EMF"

(electromotive force, EMF).



存在电流原因

磁力线随磁体转动, 导线切割磁力线产生电动势 (M观点).

磁力线不随磁体转动. 磁铁中电子受磁力在磁体内部产生电动势 (N观点).

— 单极感应

[旋转坐标系 (rotating coordinate system)]

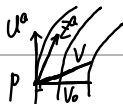
其中 F_{ab} 在惯性系与非惯性系中的分量关系仍可使用 $\vec{E}, \vec{B} \rightarrow \vec{E}', \vec{B}'$

· 带电粒子场

简化: 连续分布的电荷和电流 $\rightarrow$ 由大量带电质点 (同属电子) 组成的尘埃.

电荷为 e , 4-速为 U^α , 瞬时共动观者为 (p, U^α)

向部同时随体元体积为 V_0 (固有体积) 其中有 N 个带电质点.



共动观者测得的质点数密度 n_0 (固有数密度) $n_0 = \frac{N}{V_0}$ 一般观者 $n = \frac{N}{V} = \gamma \frac{N}{V_0} = \gamma n_0$

固有电荷密度

$\rho_0 = en_0$

一般观者 $\rho = en = \gamma \rho_0$

共动观者测得电流密度

$j_0^\alpha = 0$

一般观者 $j^\alpha := \rho U^\alpha$

— 电荷密度与电流密度依赖于坐标系

U^α 为 (p, z^α) 的 3-速

Def 2 带电粒子流的 4-电流密度 (4-current density) 定义为 $J^\alpha := \rho U^\alpha$

Prop 6-6-4 J^α 可借瞬时观者 (p, z^α) 做如下 3+1 分解: $J^\alpha = \rho z^\alpha + j^\alpha$

Pf: $J^\alpha := \rho U^\alpha = \rho \cdot \gamma (z^\alpha + u^\alpha) = \rho z^\alpha + \rho u^\alpha = \rho z^\alpha + j^\alpha$.

即瞬时观者测得的电荷密度 ρ 和 3-电流密度 j^α 分别是

$\rho = -z_\alpha J^\alpha$

4-电流密度 J^α 的时间分量 J^0 和空间分量 j^α

$j^\alpha = J^\alpha$

电荷的守恒性方程 [电荷守恒] $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Leftrightarrow 0 = \partial_\alpha J^\alpha = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i$

6-6-2 麦克斯韦方程.

3+1 语言中 惯性坐标系下麦克斯韦方程的微分形式 (几何高斯制) $c=1$ $4\pi\epsilon_0=1$ $\mu_0=4\pi$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

4维语言下的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \\ \partial [a F_{bc}] = 0 \end{cases}$$

Prop 6-6-5 对任惯性系 $\{t, x, y, z\}$ 由4维语言下的麦克斯韦方程可以导出

电荷守恒律 $\partial_a J^a = 0$

3维麦克斯韦方程. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 4\pi \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Pf: $\partial_b J_b = -(4\pi)^{-1} \partial_b \partial^a F_{ab} = -(4\pi)^{-1} \partial^b \partial^a F_{[ab]} = 0$

δ_{ab} 为所选惯性系的等+面上的 (洛伦) 欧氏度规

$\hat{\partial}_a$ 和 ∂_a 为与 δ_{ab} 和 η_{ab} 适配的导数算符. 令 $\vec{E}^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$

空间矢量 E^a 满足 $E_0 = 0$ $\hat{\partial}_a E^a = (dx^i)_a (\frac{\partial}{\partial x^i})^a \hat{\partial}_i E^i = \hat{\partial}_i E^i = \frac{\partial E^i}{\partial x^i}$ $\partial_a E^a = \partial_0 E^0 + \partial_i E^i = \frac{\partial E^i}{\partial x^i}$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \hat{\partial}_a E_a = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} = \partial^a E_a = \partial^a (F_{ab} Z^b) = Z^b (-4\pi J_b) = 4\pi \rho$ $\rho = -Z^b J_b$

$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \hat{E}^{ab} \hat{\partial}_a E_b$ $\hat{E}_{abc}$ 是 Σ_t 上与 δ_{ab} 适配的体积元, E_{abcd} 是与 η_{ab} 适配的体积元

$\partial_a E_b = (dx^i)_a (dx^j)_b \hat{\partial}_i E_j = (dx^i)_a (dx^j)_b \partial_i E_j$

$\partial_a E_b = (dx^\mu)_a (dx^i)_b \partial_\mu E_j = (dx^0)_a (dx^i)_b \partial_0 E_j + (dx^i)_a (dx^j)_b \partial_i E_j$

将其投影至 Σ_t 上. $(dx^0)_a$ 投影为零 $(dx^i)_a$ 投影为自身.

$h^a d h^b \partial_a E_c = (dx^i)_a (dx^j)_b \partial_i E_j = \hat{\partial}_a E_b \neq \partial_a E_b$

$\hat{E}^{ab}$ 为空间张量 $h^a d h^b \hat{E}^{ab} = \hat{E}^{de}_c$

$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = \hat{E}^{ab}_c h^a d h^b \partial_a E_c = \hat{E}^{de}_c \partial_a E_c = \hat{E}^{ab}_c \partial_a E_b$

$= \hat{E}^{ab}_c \partial_a (F_{bc} Z^c) = Z^c \hat{E}^{ab}_c \partial_a F_{bc}$ $0 = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

$= Z^c \hat{E}^{ab}_c (-1) (\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca})$

$= -Z^c \hat{E}^{ab}_c \partial_a F_{bc} - \hat{E}^{ba}_c \partial_a (F_{cb} Z^c) = \hat{E}^{ab}_c \partial_a (F_{bc} Z^c) = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c$

$\geq (\vec{\nabla} \times \vec{E})_c = -Z^c \hat{E}^{ab}_c \partial_a F_{bc}$ $\hat{E}_{abc} = n^d \epsilon_{dabc} = Z^d \epsilon_{dabc}$ $n^d = Z^d$ 为法矢

$= -Z^c Z^d \epsilon_{dabc} \partial_a F^{ab} = -Z^c \partial_c (\epsilon_{dabc} F^{ab} Z^d) = -2 Z^c \partial_c (*F_{dc} Z^d) = -2 Z^c \partial_c B_c$

$\epsilon_{dcab} *F_{dc} = \pm \epsilon_{dcab} F^{ab}$

$$(\vec{v} \times \vec{E})_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^c (\vec{v} \times \vec{E})_c = -z^e \partial_e B_i = -\frac{\partial B_i}{\partial t} \quad \text{即} \quad \vec{v} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

其余两个方程自证。

6.6.3 4维洛伦兹力 (Lorentz force).

带电质点对电磁场的影响由麦克斯韦方程反映。

带电质点受到电磁场的作用力 - 洛伦兹力 $\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$ q 为质点电荷 $\vec{u}$ 为质点速度

$\Rightarrow$ 带电质点在电磁场中的运动方程 $\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. 应具有洛伦兹协变性。

Prop 6-6-6 设质点的电荷为 q , 4速为 U^a , 4动量为 P^a , 则电磁场 F_{ab} 对它的力 (4洛伦兹力)。

$$F^a = q F^a_b U^b \quad (\text{其中 } F^a_b = \gamma^{ac} F_{cb}). \quad q \text{ conserved + invariant}$$

因而只受电磁力的质点的4维运动方程为 $q F^a_b U^b = U^b \partial_b P^a$

Pf: P 为带电质点世界线上任一点, (P, z^a) 为任一瞬时观者, 正交归一4标架为 $\{\epsilon_a\}$ 其中 $(\epsilon_0)^a = z^a$

应证 F^a 对该瞬时观者的分量满足 $F^i = \gamma f^i$ $F^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}$ 其中 $\gamma = -z^a u_a$.

f^i 是3维洛伦兹力 $\vec{f}$ 的第 i 分量, $\vec{u} \equiv u^a$ 是质点相对于 (P, z^a) 的3速。

$$F^a = \gamma q F^a_b (z^b + u^b) = \gamma q (E^a + F^a_b u^b) \rightarrow F_a = \gamma q (E_a + F_{ab} u^b)$$

$$\textcircled{1} \text{ 空间分量 } F_i = \gamma q (E_i + F_{ij} u^j) \quad f_i = q (E_i + (\vec{u} \times \vec{B})_i).$$

下证 $(\vec{u} \times \vec{B})_i = F_{ij} u^j$.

$$(\vec{u} \times \vec{B})_c = \hat{\epsilon}^{ab}_c u_a B_b = \hat{\epsilon}^{ab}_c u_a (-^* F_{bd} z^d) = -\hat{\epsilon}^{ab}_c u_a (\frac{1}{2} F^{ef} \epsilon_{efbd} z^d).$$

$$= -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{abc} u^a F_{ef} \epsilon^{efbd} z_d = -\frac{1}{2} z^g \epsilon_{gabc} u^a F_{ef} \epsilon^{efbd} z_d.$$

$$= -\frac{1}{2} u^a F_{ef} z^g z_d \epsilon_{gabc} \epsilon^{efbd} = \epsilon_{bgac} \epsilon^{bdef} \stackrel{(5-4-10)}{=} (-1)^{s-1} (4-1)! 1! \delta^e \dots \delta^f$$

$$= -\frac{1}{2} u^a z^g z_d F_{ef} (-3!) \delta^e_{[g} \delta^f_{d]} \delta^a_c = +\frac{3}{2} u^a z^g z_d F_{[d} F_{e]} \delta^e_g \delta^a_c \delta^f_c$$

$$= u^a z^g [z_d F_{ef} + z_f F_{de} + z_e F_{fd}] \delta^d_g \delta^e_a \delta^f_c.$$

$$= u^a z^g [z_g F_{ac} + z_c F_{ga} + z_a F_{cg}]$$

$$= -u^a F_{ac} + z_c z^g u^a F_{ga} \quad u^a z_a = 0$$

空间量

空间分量 + 时间分量 - 时间分量 = 空间分量.

$$(\vec{u} \times \vec{B})_c = F_{ca} u^a - \cancel{Z_c u^a F_{ag} z^g} E_a. \quad Z_c (e_i)^c = 0.$$

$$(\vec{u} \times \vec{B})_i = (\vec{u} \times \vec{B})_c (e_i)^c = [F_{ca} u^a - Z_c u^a E_a] (e_i)^c = F_{ij} u^j$$

② 时间分量 $F^0 = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}$ $(e^0)_a E^a = 0$ $(e^0)_a = -(e^0)^a$ $F_{0i} = -E_i$

$$\begin{aligned} F^0 &= F^a (e^0)_a = \gamma \gamma (e^0)_a (E^a + F^a_b u^b) = -\gamma \gamma (e^0)^a F_{ab} u^b = -\gamma \gamma F_{0i} u^i \\ &= \gamma \gamma E_i u^i = \gamma \gamma [E_i + (\vec{u} \times \vec{B})_i] u^i = \gamma f_i u^i = \gamma \vec{f} \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

$$(\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} = 0 \quad Q.E.D.$$

6.6.4 电磁场的能动张量.

电磁场的能动张量 $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{cd} F^{cd})$ 其中 F_{ab} 为电磁场张量.

对称形式 $T_{ab} = \frac{1}{8\pi} (F_{ac} F_b^c + {}^*F_{ac} {}^*F_b^c)$ ${}^*F_{ab}$ 为 F_{ab} 的对偶形式

选任意惯性系可知能量密度 $T_{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$ ${}^*F_b^c = \eta^{ac} {}^*F_{ba}$

能流密度 $w_i = -T_{i0} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_i$ $\eta_{ab} (e^0)^a (e_i)^b = 0$

$J^a = 0$ (无源电磁场) $\partial^a T_{ab} = 0$ 服从能量守恒. 动量守恒. 角动量守恒.

$J^a \neq 0$ (含源电磁场并非孤立体系) $\partial^a T_{ab} \neq 0$

→ 电磁场与带电粒子的总能动张量满足 $\partial^a T_{ab}^{\text{Total}} = 0$.

6.6.5 电磁4势及其运动方程. 电磁波.

麦克斯韦方程 $\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b$

$F_{ab} \mapsto \underline{F}$ $\partial [{}_a F_b] = 0$

$dF = 0$ 电磁场张量是闭的 $\exists A$ st $\underline{F} = dA$ 恰当的 $\xrightarrow{\text{背景流形为 } \mathbb{R}^4}$

$F_{ab} = (dA)_{ab} = \partial [{}_a A_b] = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ 讨论磁单极子 (monopole).

Def 3 满足 $\underline{F} = dA$ 的 A_a 叫电磁场 F_{ab} 的4势 (4-potential) 会在 $\mathbb{R}^4$ 中挖去一块.

4势的不唯一性: A 是 $\underline{F}$ 的4势, χ 是 $\mathbb{R}^4$ 上任意 C^2 函数

$$d(dx)=0 \quad Q: \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{a}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{a} \text{ 是否是 4 势与 } F_{ab}$$

$$\Rightarrow \tilde{A} \equiv A + dx \quad d\tilde{A} = dA = F \text{ 故 } \tilde{A} \text{ 也是 } F \text{ 的 4 势.} \quad \text{在同一惯性系下得到的关系}$$

规范自由性 (gauge freedom)

$$\rightarrow \text{洛伦兹规范条件 (Lorentz gauge condition)} \quad \partial^\alpha A_\alpha = 0$$

$$\text{一定存在 } A_\alpha \text{ 使洛伦兹规范条件满足: } \tilde{A} \equiv A + dx \quad \text{令 } \tilde{A}_\alpha \equiv A_\alpha + \partial_\alpha x \text{ 使 } \partial^\alpha \tilde{A}_\alpha = 0$$

$$\partial^\alpha \tilde{A}_\alpha = \partial^\alpha A_\alpha + \partial^\alpha \partial_\alpha x = 0 \Rightarrow \partial^\alpha \partial_\alpha x = -\partial^\alpha A_\alpha.$$

$$\partial^\alpha \partial_\alpha x = \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha x = -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\partial^\alpha A_\alpha. \quad (\text{非齐次波动方程}).$$

x 的非零解存在且很多 $\Rightarrow$ 今后默认选取满足洛伦兹规范条件的 4 势.

$$\text{在任惯性系 } \{t, x\} \text{ 中 } A_\alpha \text{ 做 3+1 分解} \quad A_\alpha = -\phi(dt)_\alpha + a_\alpha.$$

ϕ 和 a^α 分别是电磁场 F 的标势与 3 矢量

4 势下的麦克斯韦方程与电磁波.

$$\begin{aligned} \text{麦克斯韦方程} \quad \left\{ \begin{aligned} \partial^\alpha F_{ab} &= -4\pi J_b \\ \partial[aF_{bc}] &= 0 \end{aligned} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} d^*F &= 4\pi \underline{J}^* \\ dF &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{证明见 §7.2 甚读}). \end{aligned}$$

$$-4\pi J_b = \partial^\alpha (\partial_\alpha A_b - \partial_b A_\alpha) = \partial^\alpha \partial_\alpha A_b - \underbrace{\partial_b \partial^\alpha A_\alpha}_0. \quad \left\{ \begin{aligned} F &= dA \text{ 自动满足.} \\ \partial^\alpha \partial_\alpha A_b &= -4\pi J_b \end{aligned} \right.$$

($\Leftarrow$) 3 维语言下关于标势与矢势的达朗伯方程 (d'Alembert equation)

$$\square^2 \phi \equiv \vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi \rho.$$

$$\square^2 \vec{a} \equiv \vec{\nabla}^2 \vec{a} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{j}$$

无源电磁场 $J_b = 0$: $\partial^\alpha \partial_\alpha A_b = 0$ 波动方程.

形如 $A_b = C_b \cos \theta$ θ 为实标量场, 称为相位 (phase). (polarization vector).

C_b 为非零的常矢量场 ($\partial_\alpha C^b = 0$), 称为偏振矢量

$$\text{代入方程} \quad \partial^\alpha \partial_\alpha (C_b \cos \theta) = C_b \partial^\alpha (\sin \theta \partial_\alpha \theta) = -C_b [\sin \theta \partial^\alpha \partial_\alpha \theta + \cos \theta (\partial^\alpha \theta \partial_\alpha \theta)] = 0$$

$$\Rightarrow (\partial^\alpha \theta)(\partial_\alpha \theta) = 0 \text{ 和 } \partial^\alpha \partial_\alpha \theta = 0 \text{ 为波动方程 } \partial^\alpha \partial_\alpha A_b = 0 \text{ 解.}$$

令 $K^a \equiv \partial_a \theta$ $K^a K_a = 0$ 矢量场 K^a 类光.

$$\rightarrow 0 = \partial_b (K^a K_a) = 2 K^a \partial_b K_a = 2 K^a \partial_b (\partial_a \theta) = 2 K^a \partial_a \partial_b \theta = 2 K^a \partial_a K_b$$

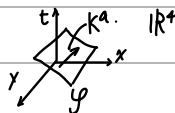
$K^a \partial_a K^b = 0$ 测地线方程.

3维子流形

θ 为实标量场 $\rightarrow$ 等 θ 面 $\mathcal{S} = \{p \in \mathbb{R}^4 \mid \theta_p = C\}$. (C 为常数) $\mathcal{S}$ 为 $\mathbb{R}^4$ 中的超曲面.

① $K^a = \partial_a \theta$ 是超曲面 $\mathcal{S}$ 上的法矢量 ② K^a 是类光矢量场 $\Rightarrow \mathcal{S}$ 是类光超曲面 [等相面].

③ K^a 的积分曲线是身在 $\mathcal{S}$ 上的类光测地线.



K_a 在任一惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 下用对偶坐标基矢展开

$$(d\theta)_a = \partial_a \theta = K_a = K_\mu (dx^\mu)_a. \quad K^a \text{ 为常矢量场} \rightarrow K_\mu \text{ 为常数.}$$

$$d\theta = K_\mu dx^\mu. \quad \text{积分} \quad \theta = K_\mu x^\mu + \theta_0 (\text{常数}) = K_0 x^0 + K_i x^i$$

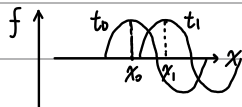
$$K^a \text{ 做 3+1 分解} \quad K^a = K^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_a = K^0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_a + K^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_a \equiv \omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_a + k^a \quad \text{其中 } k^i = K^i$$

$$K_0 = \eta_{00} K^0 = -\omega \quad K_i = \eta_{ii} K^i = \eta_{ii} k^i = k_i$$

相位 $\theta = -\omega t + k_i x^i$ 波动解. $A_b = C_b \cos(\omega t - k_i x^i)$. $K^a = \omega \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_a + k^a$ 为 4 维类光矢量
角频率. 3 维波矢量 一单色平面电磁波 (monochromatic plane wave).

[单色指仅含一个角频率, 平面指波阵面是平面].

复习: 在一维空间中标量波 $f(t, x) = F \cos(\omega t - kx)$



$$\omega t_0 - kx_0 = 0 \quad f(t_1, x_0) = F \cos(\omega t_1 - kx_0).$$

$$t_1 = t_0 + \Delta t. \quad f(t_0, x) = F \cos(\omega t_0 - kx)$$

$$\omega t_0 + \omega \Delta t - kx_1 = 0 \quad f(t_1, x) = F \cos(\omega t_0 - kx + \omega \Delta t)$$

零相位面 $x_0 \rightarrow x_1$ 发生传播 [波的传播]. 相位传播速度 [相速] $= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}$

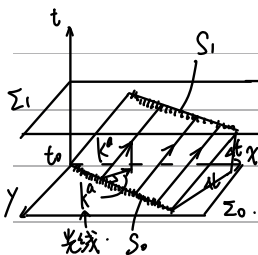
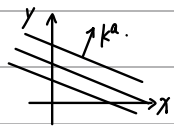
三维空间中标量波 $f(t, x^i) = F \cos(\omega t - k_i x^i)$.

波阵面: 在某时刻三维空间中等相位组成的面 (等 θ 面).

取 t_0 时刻相位 $\theta_0 = \omega t_0 - \underbrace{k_i x^i}_{\vec{k} \cdot \vec{r}}$ 等 θ_0 面方程 $\vec{k} \cdot \vec{r} = 0$ 为平面. $\rightarrow$ 平面波

证明 k 为波阵面的法矢: $\theta_0 = -\omega t_0 + k_i x^i$

法矢 $\partial_a \theta_0 = (d\theta_0)_a = k_i (dx^i)_a = k_a \rightarrow k^a$ 为法矢.



惯性坐标系 (t, x^i) Σ_0 为 t_0 时刻的同时面, Σ_1 为 t_1 时刻的同时面

$\mathcal{S}$ 为等相面 (4 维闵氏时空中的超曲面). (2 维).

$S_0 \equiv \mathcal{S} \cap \Sigma_0$ 是同时面 Σ_0 上等相点集合 — t_0 时刻的一张波阵面

$S_1 \equiv \mathcal{S} \cap \Sigma_1$ 是波阵面 S_0 沿波的传播方向在 $t-t_0$ 时间后到达的新阵面

$\Rightarrow \mathcal{S}$ 为波阵面 S_0 的世界面, 描述波阵面随时间的演化 (波的传播).

$$\text{相速} = \frac{d\omega}{dk} = 1 = \frac{c}{k}$$

波阵面的传播速率为光速 ($\mathcal{S}$ 为类光超曲面)

类光矢量 K^a 在同时面上的投影 k^a 垂直于波阵面 S_0 .

K^a 积分曲线的投影 — 光线.

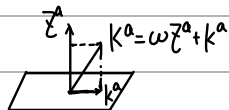
光子的世界线 [类光测地线].

$K^a = \partial^a \theta$ 4 波矢 K^a 由单色平面波决定, 是绝对的

$K^a = \omega (\frac{\partial}{\partial t})^a + k^a$ 角频率 ω 和 3 波矢 k^a 取决于所选惯性系, 是相对的.

任一时空点 p 的 K^a 可借该点任一时观者 $(p, \tilde{e}^a)$ 分解

$$K^a = \omega \tilde{e}^a + k^a$$



其中 $\omega = -K^a \tilde{e}_a$ 和 k^a 为该观者测得的角频率和 3 波矢.

$$K^a K_a = (\omega \tilde{e}^a + k^a)(\omega \tilde{e}_a + k_a) = -\omega^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = k^a k_a = k^2$$

几何光学 (geometric optics): 用光线代替波动概念描述单色平面电磁波的方法 [光的粒子性]

$A_b = C_b \cos \theta = C_b \cos(\omega t - k_i x^i)$. (模型语言). 条件: C_b 及 $K^a = \partial^a \theta$ 在全时空为常量.

慢变振幅 快变相位 $\tilde{L}$ 为特征长度 $\begin{cases} \text{尺度小于 } \tilde{L} \text{ 的时空. } \cos \theta \text{ 变化许多周期: 可近似处理} \\ \text{尺度大于 } \tilde{L} \text{ 的时空. } C_b \text{ 或 } K^a \text{ 变化明显.} \end{cases}$

局域单平面波: 电磁波存在的时空区域以 $\tilde{L}$ 满足空间尺度很大于波长 $\lambda \equiv \frac{2\pi}{\omega}$ ($\omega = -\tilde{e}^a K_a$)

[光子表述]. 量子电动力学 $\xrightarrow{\hbar \rightarrow 0}$ 经典电动力学.

波粒二象性.

(视为普通粒子但 $m_0=0$)

同域单色平面电磁波 = 一大群光子组成的光子流, 它们有近似相同的 K^a 和 C^a

定义光子的4动量 P^a $P^a := \hbar K^a$.

光子世界线: 仿射参数 β 满足 $P^a = (\frac{\partial}{\partial \beta})^a$ 的类光测地线.

3+1 分解 $P^a = E Z^a + p^a$ E 为光子能量 p^a 为光子3动量.

$$P^a = \hbar(\omega Z^a + k^a) \quad E = \hbar\omega \quad p^a = \hbar k^a$$

$$K^a K_a = 0 \Rightarrow P^a P_a = 0 = (E Z^a + p^a)(E Z_a + p_a) = -E^2 + p^2 = 0 \Rightarrow E^2 = p^a p_a = p^2$$

b.b.6 光的多普勒效应.

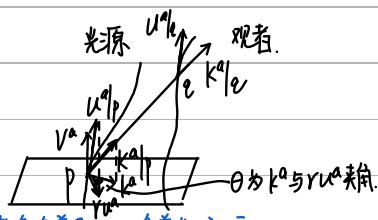
观者和光源有任意运动状态, 4速各为 U^a 和 V^a .

光源在 P 点发光被观者在 Q 点收到. 光子4波矢为 K^a

发光时 V^a 测得的角频率 $\omega = (-K^a V_a)|_P$

接收时 U^a 测得的角频率 $\omega' = (-K^a U_a)|_Q$

} 两者存在差异——多普勒效应



平直时空有绝对平移 $U^a|_Q, K^a|_Q \rightarrow U^a|_P, K^a|_P$ $V^a V_a = -1$

$$\omega' = (-K^a U_a)|_Q = (-K^a U_a)|_P = -(\omega V^a + k^a) \gamma (V_a + u_a) = \gamma (\omega - k^a u_a)$$

$$= \gamma (\omega - k u \cos \theta) = \gamma \omega (1 - u \cos \theta)$$

多普勒效应 $\omega' = \gamma \omega (1 - u \cos \theta)$ $\gamma \equiv -V^a U_a$.

$$\textcircled{1} \theta=0 \text{ 观者与光源相背而行 } \omega' = \gamma \omega (1 - u) = \omega \frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}} = \omega \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} < \omega.$$

频率减小, 波长增大 [红移].

$$\textcircled{2} \theta=\pi \text{ 观者与光源相向而行 } \omega' = \gamma \omega (1 + u) = \omega \frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}} = \omega \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} > \omega$$

频率增大, 波长减小 [蓝移].

$$\textcircled{3} \theta=\frac{\pi}{2} \text{ 观者相对于光源横向移动 } \omega' = \gamma \omega \text{ 横向多普勒效应.}$$

第七章 广义相对论基础 Chapter 7 Foundations of General Relativity

§7.1 引力与时空几何 Gravity and Spacetime Geometry

· 狭义相对论要求物理定律的数学表达式具有洛伦兹协变性 (而非伽利略协变性)

① 麦克斯韦电磁理论 ② 牛顿运动定律 $\rightarrow$ 相对论性力学 $\vec{p} = \gamma m \vec{u} = m \vec{u} (1 - u^2)^{-1/2}$.

③ 牛顿万有引力理论. $\vec{F} = \frac{GMm}{r^2} \vec{r} = m \vec{A}$ 引力场强 $\vec{A} = \frac{GM}{r^2} \vec{r} = \nabla \phi$

取无穷远处为零势面 $\phi = - \int_r^\infty \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \frac{GM}{r}$

质量通量 $\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \frac{GM}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi GM = 4\pi G \iiint_V \rho dV$.

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{A} = \nabla \cdot (\nabla \phi) = 4\pi G \rho.$$

1. 引力势 ϕ 和质量密度 ρ 的关系: $\nabla^2 \phi = 4\pi \rho$ 泊松方程 ($G=1$).

— 无洛伦兹协变性.

2. 方程解 $\phi(\vec{r}, t) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$ — 引力场的作用瞬时传播 (超距).

引力理论改造的困难:

④ 牛顿万有引力定律类比库仑定律, 但存在“符号差别”

电荷有正负, 同性相吸异性相斥 / 质量只正不负, 同性只吸不斥.

引力场变化产生的引力波以光速传播, 带走的能量是正的. 且修改理论存在问题

系统在辐射引力波时自身能量增加, 辐射强度增大, 获得更多能量

⑤ 在狭义相对论框架内建立合适的引力理论存在自身问题

$\Rightarrow$ 独立于狭义相对论的引力理论 — 广义相对论

重要因素 ④ 引力的“普适性” (universality) ⑤ 马赫原理.

* 马赫原理: 物体的运动并非绝对, 而是相对于宇宙中其它物质的相对运动.

在非惯性系中 物体所受惯性力是一种引力表现, 是宇宙中其它物质对该物体的总作用

物体的惯性不是物体自身属性, 而是宇宙中其它物质作用的结果.

牛顿引力的普适性:

静电场无普适性

1° 任何物体在引力场中都受引力

1° 电中性物体在静电场中不受静电力

2° 任何两个质点在引力场中同一点具有相同的引力加速度. 2° 静电加速度 $\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$ 依赖于荷质比

{ 质点的“荷”: 物质含量的量度, 决定它在引力场中如何受力 [引力质量 m_G].

{ 质点的“质”: 物质惯性的量度, 决定它在力的作用下出现的加速度大小 [惯性质量 m_I].

引力加速度 $\vec{a} = \frac{m_G}{m_I} \vec{g}$ $\vec{g}$ 为该点的引力场强.

• 等效原理 $m_G = m_I$. [存在更深奥的理论——广义相对论, 推导出 $m_G = m_I$]

→ 初始位置和初始速度相同的, 除引力外不受力的任何物体在引力场中的运动完全一致.

毫无个性的集体行为 $\xrightarrow{\text{暗示}}$ 引力是整个时空背景的内禀性质.

猜测 { 引力可忽略时 $\rightarrow$ 平直时空.

$(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$.

引力不可忽略 $\rightarrow$ 弯曲时空 弯曲情况取决于产生引力场的物质分布. (M^4, g_{ab})

4维语言 引力效应体现为时空弯曲

假设 1

除引力外不受力的质点 —— 自由质点

假定弯曲时空中自由质点的世界线是该时空的测地线

假设 2.

引力通过改变此时空的测地线来改变自由质点的运动方式

$m_G = m_I$ 作为逻辑结论推导:

设两个自由质点的初始位置和初始速度相同, 即它们的世界线相交且在交点处切矢相等.

则两自由质点在质点后的测地线完全重合.

Pf. “一点一矢定一测” ① 自由质点走测地线

② 两质点出发点与该点切矢完全相同

③ 测地线由初始条件唯一确定.

} 两条测地线
完全重合.
 $\Updownarrow$
 $m_G = m_I$.



广义相对论的基本假设:

洛伦兹度规场

(a) 3维空间引力效应体现于4维时空几何的弯曲. M 为4维流形 g_{ab} 为 M 上某个非平直的

引力可忽略时背景时空为4维闵氏空间 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$; 引力不可忽略时背景时空是弯曲的 (M^4, g_{ab})

(b) 自由质点除引力外受到 $F^a = 0$ 运动方程为 $0 = U^b \nabla_b U^a = m U^b \nabla_b U^a$ (引力作用)

自由质点的世界线是所在弯曲时空 (M, g_{ab}) 的测地线 $U^b \nabla_b U^a = 0$ ∇_b 为逆曲 g_{ab} 的导数算符.

(c) 时空的弯曲情况受物质分布的影响, 其间的关系由爱因斯坦方程描述 $G_{ab} = T_{ab}$

广义相对论力学的弱场低速近似为牛顿力学 (仅计算结果近似一致)

§7.2 弯曲时空中的物理定律 Physical Laws in Curved Spacetime.

实际生活和实验室中引力场太弱 $\rightarrow$ 无法通过观察或实验归纳总结.

根据基本原则用假设方法得到定律 $\rightarrow$ 由推导的结论与实验观测结果一致性验证正确性

· 广义协变性原理 (principle of general covariance): [Wald (1984) p. 57, 68]

只有时空度规及其派生量才允许以背景几何量的身份出现在物理定律的表达式中.

爱因斯坦: 物理定律的数学表达式在任意坐标变换下形式不变

所有坐标系 (惯性系与非惯性系) 平权

背景: 时空几何 (M, g_{ab})

物理定律 $\leftarrow \begin{cases} \text{时空度规 } g_{ab} \xrightarrow{\text{派生}} \text{如导数算符 } \nabla_a, \text{黎曼曲率 } R_{abc}{}^d \dots \text{ [时空几何量]}. \\ \text{代表物理客体的物理量, 如4动量 } p^a \text{ 和电磁场量 } F_{ab} \text{ [动力学量]}. \end{cases}$

排除人为指定因素与坐标系依赖的量 (如 ∂_a).

非抽象指标表述: 物理规律能表为张量方程, 即具有广义协变性.

例: (1,1)型张量 $T = S$ $\begin{cases} T^a{}_b = S^a{}_b \\ T'^a{}_b = S'^a{}_b \end{cases}$

含纸的等式无广义协变性 $\left\{ \begin{array}{l} \text{抽象指标表述: } P^{\alpha}_{\beta\gamma} \text{ 是具有坐标依赖的张量.} \\ \text{非抽象指标表述: } P^{\sigma}_{\mu\nu} \text{ 不满足张量定义.} \end{array} \right.$

弯曲时空物理规律的原则: (不能唯一确定) + 物理要求 + 美学要求.

1a) 满足广义协变性原理

1b) 在时空度规 g_{ab} 等于闵氏度规 η_{ab} 时, 应能回到狭义相对论的相应定律.

例如: 质点的世界线分别是类时曲线和类光曲线 [质点必定亚光速; 光速不变原理].

质点的固有时等于它的世界线长度.

质点的4速 U^a 为世界线的单位切矢, 4动量 $P^a := mU^a$, 相对于 (p, Σ) 能量 $E := -P^a \xi_a$

电磁场由2形式场 F_{ab} 描述

狭义相对论(平时空) $\rightarrow$ 广义相对论(弯曲时空):

最小替换法则 $\eta_{ab} \mapsto g_{ab}$ $\partial_a \mapsto \nabla_a$. ∇^2 阶或高阶导数项存在问题

例如: 质点的4加速 $A^a := U^b \partial_b U^a \mapsto A^a := U^b \nabla_b U^a$

4力 $F^a := U^b \partial_b P^a \mapsto F^a := U^b \nabla_b P^a$.

电磁场中质点运动方程. $2 F^a_b U^b = U^b \nabla_b P^a$.

电磁场能动张量. $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd})$

电磁场运动方程. $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \Leftrightarrow dF = 0$.

闭曲线引 $\int \underline{A} \Rightarrow F = dA$

$F_{ab} = 2\nabla_{[a} A_{b]} = \nabla_a A_b - \nabla_b A_a$.

电磁4势表示麦克斯韦方程. $-4\pi J_b = \nabla^a (\nabla_a A_b - \nabla_b A_a) = \nabla^a \nabla_a A_b - \nabla^a \nabla_b A_a$

SR: $-\nabla^a \nabla_b A_a = -\partial^a \partial_b A_a = -\partial_b \partial_a A^a$ 洛伦兹规范 $\partial_a A^a = 0$

$\Rightarrow \partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b$.

导数算符的非对易性

GR: $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) A^a = -R_{ab}{}^d{}_a A^d = R_{bd} A^d = R_b{}^d A_d$.

$-\nabla^a \nabla_b A_a = -\nabla_b \nabla^a A_a - R_b{}^d A_d = -R_b{}^d A_d$

$\Rightarrow \nabla^a \nabla_a A_b - R_b{}^d A_d = -4\pi J_b$. 电荷守恒律 $\nabla_a J^a = 0$

弯曲时空的麦克斯韦方程组 (外微分表述) $d^*F = 4\pi J$ $dF = 0$

§7.3 费米移动与无自转观者. Fermi transport and non-rotating observers

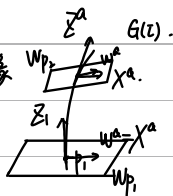
• 无自转观者.

转动概念与判断方法:

牛顿力学: 回转仪飞轮的自转轴与判定对象之间的夹角是否变化.

4维语言: 观者世界线为 $G(\tau)$, 空间矢量 X^a 与 W^a 分别代表回转仪轴与对象

W^a 与 X^a 在点 $p_1 \equiv G(\tau_1)$ 重合而在点 $p_2 \equiv G(\tau_2)$ 不重合.



猜想无转动空间矢量场 X^a

① X^a 是 $G(\tau)$ 上的平移矢量场

— 不正确: $p_i \equiv G(\tau_i)$ 的空间矢量 $X^a|_{p_i}$ 决定的平移矢量场一般不是 $G(\tau)$ 上的空间矢量场

$$\bar{z}^b \nabla_b (X^a \bar{z}_a) = \underbrace{\bar{z}^b \nabla_b X^a}_{=0} \bar{z}_a + \bar{z}^b X^a \nabla_b \bar{z}_a = X^a A_a \quad A_a \text{ 是 } G(\tau) \text{ 的4加速}$$

$G(\tau)$ 不是测地线 ($A^a \neq 0$) 且 X^a 与 A^a 不正交 ($X^a A_a \neq 0$) 则 $\bar{z}^b \nabla_b (X^a \bar{z}_a) \neq 0$

即 $X^a \bar{z}_a$ 沿 $G(\tau)$ 不是常数, 不可能在 $G(\tau)$ 上处处为零 $\Rightarrow X^a$ 不一定是空间矢量场

② X^a 做费米移动时保证 X^a 空间性 [$G(\tau)$ 为测地线, 费米移动 = 平移].

$$X^a \text{ 沿 } G(\tau) \text{ 平移} \Leftrightarrow \bar{z}^b \nabla_b X^a = 0$$

X^a 沿 $G(\tau)$ 费米移动

Def 1 设 $G(\tau)$ 是时空 (M, g_{ab}) 中的类时线 (τ 为固有时), $\gamma_a(k, l)$ 代表沿 $G(\tau)$ 的光滑 (k, l) 型

张量场集合. 映射 $\frac{D}{d\tau}: \gamma_a(k, l) \rightarrow \gamma_a(k, l)$ 称为 $G(\tau)$ 上的费米-沃克导数算符

若它满足如下条件:

(a) 具有线性性 (b) 满足莱布尼兹律 (c) 与缩并可交换顺序

$$(d) \frac{Df}{dt} = \frac{df}{dt}$$

$$\forall f \in \mathcal{F}_G(0,0).$$

$$(e) \frac{Df v^a}{dt} = \frac{Dv^a}{dt} + (A^a z^b - z^a A^b) v_b$$

$$\forall v^a \in \mathcal{F}_G(1,0).$$

其中 $z^a \equiv (\frac{d}{dt})^a$ 代表 $G(t)$ 的 4 速, $A^a = z^b \nabla_b z^a$ 代表 $G(t)$ 的 4 加速

$$\frac{Dv^a}{dt} \equiv z^b \nabla_b v^a \text{ 是 } v^a \text{ 沿曲线 } G(t) \text{ 做协变导数}$$

$\Rightarrow \frac{Df}{dt}$ 对任意张量场的作用.

Prop. 7-3-1 费米导数的性质

1) 若 $G(t)$ 为测地线 ($A^a = 0$) 则 $\frac{Df v^a}{dt} = \frac{Dv^a}{dt}$.

2) $\frac{Df z^a}{dt} = 0$ z^a 沿 $G(t)$ 费移

3) 若 w^a 是 $G(t)$ 上的空间矢量场 则 $\frac{Df w^a}{dt} = h^a_b \frac{Dw^b}{dt}$. [空间矢量场的费米导数仍为空间矢量场]

其中 $h_{ab} = g_{ab} + z_a z_b$, $h^a_b = g^{ac} h_{cb}$ 是 $G(t)$ 上的投影映射

4) $\frac{Df g_{ab}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \forall v^a, u^b \in \mathcal{F}_G(1,0)$

$$\frac{Df(g_{ab} v^a u^b)}{dt} = g_{ab} v^a \frac{Df u^b}{dt} + g_{ab} u^b \frac{Df v^a}{dt}.$$

Pf: 1) 测地线 $A^a = 0$ 易证.

$$z^a z_b = -1 \quad A^a z_b = 0.$$

2) $\frac{Df z^a}{dt} = \frac{Dz^a}{dt} + (A^a z^b - z^a A^b) z_b = z^b \nabla_b z^a - A^a = 0.$

3) 略.

$$\begin{aligned} \text{4.1. "}\Leftarrow\text{" } \quad & v_a \frac{Df u^a}{dt} + u_a \frac{Df v^a}{dt} = v_a \left(\frac{Dv^a}{dt} + (A^a z^b - z^a A^b) u_b \right) + u_a \left(\frac{Dv^a}{dt} + (A^a z^b - z^a A^b) v_b \right) \\ & = \frac{D(v_a u^a)}{dt} + v_a u_b A^{[a} z^{b]} \cdot 2 \cdot 2. \quad 2A^{[a} z^{b]} = \frac{D(v_a u^a)}{dt} = \frac{D}{dt}(g_{ab} v^a u^b) \end{aligned}$$

$$\text{即 } \frac{D(g_{ab} v^a u^b)}{dt} = \frac{Df(g_{ab} v^a u^b)}{dt} = g_{ab} v^a \frac{Df u^b}{dt} + g_{ab} u^b \frac{Df v^a}{dt}.$$

Def 2 矢量场 v^a 称为沿 $G(t)$ 费米-沃克移动的 (Fermi-Walker transported).

$$\text{若 } \frac{Df v^a}{dt} = 0$$

Note: 1) 沿测地线的费移就是平移

2) $G(t)$ 的切速 $\dot{z}^a$ 总是沿 $G(t)$ 费移的。

$$D_F V^a / dt = 0 = D_F U^a / dt \text{ 即 } V^a, U^a \text{ 都沿 } G(t) \text{ 费移} \Rightarrow \frac{D_F(g_{ab} V^a U^b)}{dt} = \frac{D(g_{ab} V^a U^b)}{dt} = 0$$

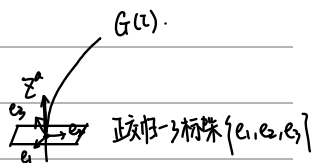
"费移保内积"

Prop 7-3-2 peG 及 $v^a \in V_p$ 决定唯一的沿 $G(t)$ 费移的矢量场。

Note: 1) $V^a, \dot{z}^a$ 沿 $G(t)$ 费移 + 费移保内积

2) 空间矢量 $v^a \in V_p$ 决定的沿 $G(t)$ 费移的矢量场 v^a

处处与 $\dot{z}^a$ 垂直, 故 v^a 为空间矢量场



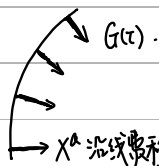
2) 点 peG 的一个正交归一标架 (其第零基矢为 $\dot{z}^a$) 的每一基矢 $(e_i)^a$ 决定一个沿 $G(t)$ 费移的矢量场, 且由费移保内积可知 4 个矢量场在线上每点正交归一。

点 p 的一个正交归一标架决定了 $G(t)$ 上唯一的正交归一费移 4 标架场

费移的物理意义:

世界线 $G(t)$ 上的空间矢量场 w^a 无空间转动 $\iff w^a$ 沿线费移 $D_F w^a / dt = 0$

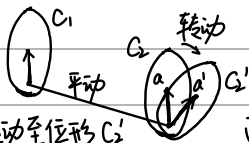
w^a 有空间转动 $\iff w^a$ 沿线非费移。



回转仪轴 = 沿回转仪世界线费移的空间矢量场

空间转动:

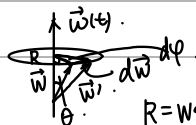
刚体运动 = 平动 + 转动



刚体从位形 C 运动至位形 C'

$$\vec{w}(t) = \vec{Oa} \quad \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \neq 0$$

起点 O 不变的矢量 $\vec{w}(t)$ 称为转动的, 若存在矢量 $\vec{\omega}(t)$ 使 $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{w}(t)$



$$|\vec{\omega}(t) \times \vec{w}(t)| = \omega \cdot w \sin \theta = \omega R = R \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\vec{w}(t)}{dt}$$

其中 $\vec{\omega}(t)$ 称为 $\vec{w}(t)$ 的 (瞬时) 转动角速度。

$$R = w \sin \theta$$

在0处的观者 $G(\tau)$.

空间转动保矢量长度 $\frac{d(\vec{w} \cdot \vec{w})}{dt} = 2 \vec{w} \cdot \frac{d\vec{w}}{dt} = 2 \vec{w} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{w}) = 0$ (U_p, hab)

推广至狭义相对论: 选用笛卡儿系 $\{t, x^i\}$. $\frac{d w^i(t)}{dt} = \epsilon^i_{jk} \omega^j w^k$.

对 $G(\tau)$ 上任一点 p , 同时面 W_p 的诱导度规 h_{ab}

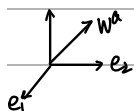
($\mathbb{R}^4, \eta_{ab}$).

得到角速度 1 形式 $\omega_a \equiv h_{ab} \omega^b$

ω_a 在 W_p 上的对偶微分形式 $\Omega_{ab} \equiv (*\omega)_{ab} = \omega^c \epsilon_{cab}$ 称为角速度 2 形式

$\epsilon_{ijk} \omega^j w^k = -\epsilon_{ijk} \omega^k w^j = -S_{ij} w^j$ 即 $\frac{d w^i(t)}{dt} = -\Omega^i_j w^j$ $t=\tau$ (惯性观者)

$e_a \parallel \vec{w}$ 正交 $\{3\}$ 标架场 $\{e_i\}^a$ $\omega^a \parallel (e_3)^a$ $\omega^1 = \omega^2 = 0$ $\omega^3 \neq 0$



$(\Rightarrow) \Omega_{23} = S_{31} = 0$ $\Omega_{12} \neq 0$ 即 ω^a 在 1-2 面内转动

ω^a 在 $i-j$ 面转动是指 Ω_{ab} 非零分量为 Ω_{ij} 和 Ω_{ji}

$\Rightarrow$ 任意时空任意类时线上任意矢量场的“时空转动”

Def 3 设 $G(\tau)$ 是时空 (M, g_{ab}) 中任观者的世界线, v^a 是线上的矢量场

若 $G(\tau)$ 上存在 2 形式场 Ω_{ab} 使 $\frac{D v^a}{d\tau} = -\Omega^{ab} v_b$ $\{\Omega^{0i}, \Omega^{ij}\}$.

即为 v^a 经受以 Ω_{ab} 为角速度的时空转动 (v^a 的时空转动角速度 2 形式是 Ω_{ab})

若 $\frac{D v^a}{d\tau} = 0$ 则 v^a 无时空转动 (spacetime rotation)

Note: $\vec{w}$ 满足 $\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \vec{w}(t) \times \vec{w}(t)$ 时, 3 维矢量 $\vec{\lambda}$ 满足 $\vec{\lambda} \times \vec{w} = 0$ ($\vec{\lambda} = \beta \vec{w}$)

则 $\vec{w}' = \vec{w} + \vec{\lambda}$ 也满足 $\frac{d\vec{w}'(t)}{dt} = \vec{w}'(t) \times \vec{w}'(t)$. 绕自身的任意转动

类似, Ω_{ab} 满足 $\frac{D v^a}{d\tau} = -\Omega^{ab} v_b$ 时, 2 形式 Λ_{ab} 满足 $\Lambda^{ab} v_b = 0$

则 $\Omega'_{ab} \equiv \Omega_{ab} + \Lambda_{ab}$ 也满足 $\frac{D v^a}{d\tau} = -\Omega'^{ab} v_b$ Ω_{ab} 的“规范自由度”

v^a 无时空转动 $(\Leftrightarrow) \Omega_{ab} = 0$ [相差一个规范变换 $\Omega'_{ab} \equiv \Omega_{ab} + \Lambda_{ab}$ ($\Lambda^{ab} v_b = 0$)]

Prop 7-7-3 设 $G(\tau)$ 上的矢量场 v^a, u^a 经受相同的时空转动 Ω_{ab} , 则 $v^a u_a$ 在 $G(\tau)$ 上为常数

Pf. $\frac{D}{d\tau}(v^a u_a) = v^a \frac{D u_a}{d\tau} + u^a \frac{D v_a}{d\tau} = v^a (-\Omega^{ab} u_b) + u^a (-\Omega^{ab} v_b) = -2 \Omega^{[ab]} v_{(a} u_{b)} = 0$

时空转动保持矢量内积与矢量长度 / 仅有长度沿 $G(\tau)$ 不变的矢量场 v^a 才可能经受时空转动

$G(t)$ 的 4 速 Z^a 沿 $G(t)$ 费移 $D_t Z^a/dt = 0 = \frac{DZ^a}{dt} + (A^a Z^b - Z^a A^b) Z_b$

$$\frac{DZ^a}{dt} = -2A^{[a} Z^{b]} Z_b = -(A^a \wedge Z^b) Z_b \leftrightarrow \frac{DZ^a}{dt} = -\Omega^{ab} Z_b.$$

Prop 7-3-4 $G(t)$ 的 4 速 Z^a 的时空转动角速度 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 形式为 $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b = A_a Z_b - Z_a A_b$

其中 A^a 是 $G(t)$ 的 4 加速

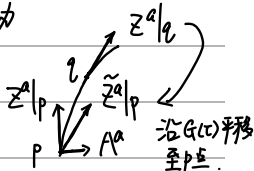
(boost)

① 当观者为惯性观者, $G(t)$ 为测地线 $A^a = 0$, 4 速 Z^a 无时空转动

② $\tilde{\Omega}_{ab} = A_a \wedge Z_b \rightarrow \tilde{\Omega}_{ab}$ 代表的时空转动发生在 $Z^a \sim A^a$ 面内.

在 $\{e_0^a = Z^a, e_i^a\}$ 正交 3-4 标架下

$(e_0^a) (e_i^a)$



空间分量 $\tilde{\Omega}_{ij} = 0$ $\tilde{\Omega}_{0i} \neq 0$ — 伪转动 (pseudo rotation)

若仅有空间分量 $\tilde{\Omega}_{0i} = 0$ — (纯)空间转动

③ 世界线 $G(t)$ 对测地线的偏离 [反映为 4 加速 $A^a \neq 0$] 是 Z^a 经受伪转动的根本原因.

$$A^a = Z^b \nabla_b Z^a \rightarrow A^a|_P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\tilde{Z}^a|_P - Z^a|_P).$$

④ Z^a 为转动 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 费移保面积, 与 Z^a 正交的任-空间矢量场 W^a 也经历伪转动 Ω_{ab}

Ω_{ab} 扣除不可避免的 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 得到纯空间转动.

Prop 7-3-5 设 $\tilde{\Omega}_{ab}$ 是 $G(t)$ 的 4 速 Z^a 经历的伪转动, Ω_{ab} 是 $G(t)$ 上的空间矢量场 W^a 所经受的时空转动, 则 $\hat{\Omega}_{ab} \equiv \Omega_{ab} - \tilde{\Omega}_{ab}$ 是纯空间转动 $\hat{\Omega}_{0i} = 0$ (至多相差一个规范变换)

Prop 7-3-6. 空间矢量场 W^a 无空间转动 $\hat{\Omega}_{ab} = 0 \iff V^a$ 做费米转动 $\frac{D_F W^a}{dt} = 0$ ($\hat{\Omega}_{ij} = 0$).

$$\text{Pf: } \frac{D_F W^a}{dt} = \frac{DW^a}{dt} + (A^a Z^b - Z^a A^b) W_b = -\Omega^{ab} W_b + \tilde{\Omega}^{ab} W_b = -\hat{\Omega}^{ab} W_b.$$

$$\hat{\Omega}_{ab} = 0 + \text{规范自由} \iff W^a \text{ 费移.}$$

若 $\hat{\Omega}_{ab} \neq 0$ 则 W^a 有空间转动.

$$\hat{\Omega}_{ab} \text{ 的对偶形式 (在 } G \text{ 的 3 维空间中) } \omega^c \quad \hat{\Omega}_{ab} = \omega^c \epsilon_{cab} \Rightarrow \frac{D_F \omega^a}{dt} = -\epsilon^a_{bc} \omega^b \omega^c$$

令 ϵ_{abcd} 为与 g_{ab} 适配的体元 $\epsilon_{bcd} = Z^a \epsilon_{abcd}$.

$$g_{ab} \frac{D_F \omega^b}{dt} = g_{ab} \left[\frac{D\omega^b}{dt} + \underbrace{(A^b Z^c - Z^b A^c)}_{\tilde{\Omega}^{bc}} \omega_c \right] = g_{ab} [-\hat{\Omega}^{bc} + \tilde{\Omega}^{bc}] \omega_c = g_{ab} \epsilon^{bcd} \omega_d \omega_c = -g_{ab} \epsilon^{bcd} \omega_d \omega_c.$$

$$= -\varepsilon_{acd} \omega^d \omega^c = -\varepsilon^b{}_{acd} \omega^d \omega^c.$$

$$\Rightarrow g_{ab} \frac{D\omega^b}{dt} = \varepsilon_{abcd} \varepsilon^b{}_{wc} \omega^d$$

ω_a 为空间矢量场 ω^a 的空间转动角速度. 对应 $\hat{\Omega}_{ab} = \omega^c \varepsilon_{cab}$

非费移的空间矢量场 ω^a 可用非零的空间转动角速度描述

$G(t)$ 上一个正交的 3 标架场 $\{e_i\}^a$ 两两正交 $\rightarrow$ 有共同时空转动角速度 $\hat{\Omega}_{ab}$

$\rightarrow$ 有共同空间转动角速度 $\hat{\Omega}_{ab}$

Prop 7-3-7 $G(t)$ 上任一正交的 3 标架场 $\{e_i\}^a$ 中的 3 个基矢场有共同的空间转动角速度 $\hat{\Omega}_{ab}$ (不再有规范自由度).

Note 1) 3 标架场的空间转动角速度 2 形式 $\hat{\Omega}_{ab}$

3 标架场的空间转动角速度矢量 ω^a 满足 $\hat{\Omega}_{ab} = \omega^c \varepsilon_{cab}$

2) 一个观者由两个要素决定 ① 世界线 $G(t)$ ② 线上的一个正交 3-4 标架场 $[e_a]^a = Z^a$

① $\rightarrow$ 观者作为质点的轨道运动

② $\rightarrow$ 空间转动角速度 ω^a 反映观者自转.

最简单的观者: 观者在弯曲时空自由下落 (4 加速 $A^a = 0$) 无自转 (空间转动角速度 $\omega^a = 0$)

世界线为类时测地线

正交 3-标架场沿线费移.

§7.4 任意观者的固有坐标系 Proper coordinate system of an arbitrary observers.

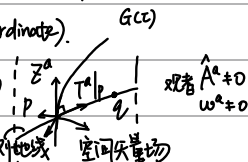
记号发生在世界线附近的事件 $\Rightarrow$ 观者 $G(t)$ 的固有坐标系 (proper coordinate).

依赖于世界线 $G(t)$ 及线上正交 3-4 标架场

$P \in P$ 的一个空间矢量决定一条类空测地线 $\mu(s)$ 经过 q 点

类空测地线 空间矢量场

q 点离世界线 $G(t)$ 足够近: 世界线 $G(t)$ 的一个邻域中有且只有这一点 p , 存在测地线经过 q



W_p 为 p 点切空间 V_p 中与 Σ^a 正交的 3 维子空间

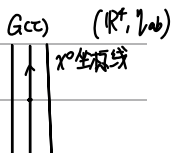
S 为类空测地线的仿射参数 (线长参数). 单位切矢 $T^a \equiv (\frac{\partial}{\partial s})^a$ $T^a|_p \equiv W^a \in W_p$

W^a 在 $G(\tau)$ 上的正则 3-3 标架 $\{(e_i)^a\}$ 下的分量 W^i ($i=1,2,3$) $W^a = W^i (e_i)^a$

p 点的 4 个固有坐标定义为 $\begin{cases} t(p) := \tau_p & \tau_p \text{ 是 } p \text{ 作为 } G \text{ 上一点的固有时.} \\ x^i(p) := s_q W^i & s_q \text{ 是 } \mu(s) \text{ 在 } p \text{ 的参数值 (} p \text{ 段线长)} \end{cases}$

$\Rightarrow G(\tau)$ 的固有坐标 $\{t, x^i\}$. 坐标域为 $G(\tau)$ 的一个开邻域

例如 4 维闵氏空间中任一洛伦兹坐标都可看作以该系 x^0 坐标线为世界线的惯性观者的固有坐标系.



Prop 7-4-1 固有坐标系在任一点 $p \in G(\tau)$ 的坐标基矢与观者 $G(\tau)$ 的正交 3-4 标架一致

因而度规 $g_{ab}|_p$ 在固有坐标系的分量 $g_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu}$

Pf: 取 p 点正交 3-4 标架的第 1 基矢 $(e_1)^a \equiv T|_p \equiv W^a$ $W^a = W^i (e_i)^a$ $W^1 = 1$
 $W^2 = W^3 = 0$

$G(\tau)$ 类空测地线 $\mu(s)$ 由 p 与 $(e_1)^a$ 决定, 线上各点 q 的固有坐标为

$t = \tau_p$ $x^2 = x^3 = 0 \Rightarrow \mu(s)$ 为 x^1 坐标线 $x^1 = s_q = s$
 故坐标基矢 $(\frac{\partial}{\partial x^1})^a|_p = (\frac{\partial}{\partial s})^a|_p = W^a = (e_1)^a$ 标架基矢

同理 $(\frac{\partial}{\partial x^2})^a|_p = (e_2)^a$ $(\frac{\partial}{\partial x^3})^a|_p = (e_3)^a$

固有坐标 t 的坐标线要求 $x^i = 0$ ($i=1,2,3$) $\rightarrow s=0$ $\mu(0) = p \in G(\tau)$.

$\Rightarrow G(\tau)$ 为 t 坐标线 ($t = \tau \Rightarrow$ 切矢为单长). 切矢 $(\frac{\partial}{\partial t})^a|_p = \Sigma^a|_p = (e_0)^a$.

由此 p 点的固有坐标基矢 $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a\}$ 重合于 p 点的正交 3-4 标架 $\{\Sigma^a|_p, (e_i)^a|_p\}$

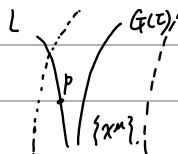
$p \in G(\tau)$ $g_{\mu\nu}|_p = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b = g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b = \eta_{\mu\nu}$

对于 $G(\tau)$ 线上一点在固有坐标系内度规分量 $g_{\mu\nu}$ 形式简洁 (对线外一点未成立)

固有坐标系的应用:

Def 1 设 $\{t, x^i\}$ 是观者 G 的固有坐标系, 质点的世界线 (至少一段 L)

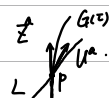
位于 G 的固有坐标域内, 则 L 在点 $p \in L$ 相对于观者 G



Q: 自由粒子替换为光子的结论

定义 3 速 $u^a := \frac{dx^i(t)}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a$ 其中 $x^i(t)$ 是 L 在固有坐标系中以 t 为参数的表达式

$$3 \text{ 加速 } a^a := \frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a$$

Note: 若 p 为 L 与 G 线的交点, 则可定义 L 在 p 点的 3 速为 $u^a := h^a_b u^b / \gamma$ 

其中 u^a 为 L 的 4 速, $\gamma = -Z^a u_a$, $h_{ab} = g_{ab} + Z_a Z_b$, $h^a_b \equiv g^{ac} h_{cb}$

可以证明交点的两种 3 速定义等价 $h^a_b u^b / \gamma = \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \frac{dx^i}{dt}$

· 理解牛顿力学的惯性力与科里奥利力。

① 非惯性观者 + 假想力 (fictitious force) 使形式上保持牛顿第二定理。

设 G 相对于某惯性系的 3 加速为 $\hat{a}$, 引入 惯性力 $-m\hat{a}$ (m 为质点质量) $\Rightarrow \nabla^a = -m\hat{a} = m\vec{a}$

L 相对于 G 的惯性加速度 $\vec{a} = -\hat{a}$

② 观者 G 转动 引入 科氏力。

考虑一个绕自身轴转动的大圆盘, 观者在盘上边缘, 则 G 做圆周运动 [平动 / 轨道运动]

观者坐在转椅上, 则 G 可以做自身的转动

观者运动 = 轨道运动 + 标架转动。
公转 自转。

轨道运动 — 世界线是螺旋线

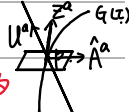
转动 — 与世界线形状无关, 由观者固联的正交归一标架沿世界线的移动决定。

惯性力和科氏力分别起源于观者的轨道运动和自转。

讨论: 任意时空背景下任意观者 G 对自由质点 L 的观测

世界线的非测地性 + 正交归一标架的非刚性 $\Rightarrow L$ 具有惯性加速度与科氏加速度

$\Rightarrow L$ 受到的假想力为加速度 $\times L$ 的质量

Prop 7-4-2 设观者 G 的 4 加速为 $\hat{A}^a$, 自转角速度为 ω^a , 被观测的自由质点 L 

与 G 的世界线交于 p 点, L 在 p 点相对于 G 的 3 速为 u^a , 则 L 在 p 点相对于 G 的 3 加速为

$$a^2 \equiv \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) (e_i)^a = -\hat{A}^a - 2\epsilon^a_{bc} \omega^b u^c + 2(\hat{A}_b u^b) u^a$$

其中 $(e_i)^a$ 是观者在 p 点的正交归一空间 3 标架, $\epsilon_{abc} = Z^d \epsilon_{dabc}$ Z^d 是 G 在 p 点的 4 速

ϵ_{abcd} 是与时空度规 g_{ab} 相适配的张元

其标架场沿世界线费移

(a) G 世界线不是测地线 ($\hat{A}^a \neq 0$), 但仍是无自转观者 ($\omega^a = 0$).

$$L \text{ 在 } P \text{ 相对于 } G \text{ 的 } 3 \text{ 加速} \quad a^a = -\hat{A}^a + 2(\hat{A}_b u^b) u^a$$

① 观者 G 相对于其瞬时静止惯性观者的 3 加速 $\hat{a}^a = \hat{A}^a$.

$-\hat{A}^a$ 为非惯性观者 G 观测质点 L 运动时添补的 惯性加速度.

② 两项大小 $\hat{A}$ 与 $\hat{A} u^2 \cos \theta$ (牛顿近似下 $u \ll 1$)

$+ 2(\hat{A}_b u^b) u^a$ 为对惯性加速度的 相对论修正项.

(b) G 世界线是测地线 ($\hat{A}^a = 0$), 但 G 有自转 ($\omega^a \neq 0$).

$$L \text{ 在 } P \text{ 相对于 } G \text{ 的 } 3 \text{ 加速} \quad a^a = -2\varepsilon^a{}_{bc} \omega^b u^c = 2\vec{u} \times \vec{\omega}$$

$2\vec{u} \times \vec{\omega}$ 为观者自转对观者造成的 科氏加速度

(c) G 世界线为非测地线 ($\hat{A}^a \neq 0$) 且有自转 ($\omega^a \neq 0$).

G 观测自由质点时既有惯性加速度和科氏加速度.

(d) G 为自由下落无自转观者 (闵氏时空中的惯性观者) ($\hat{A}^a = 0, \omega^a = 0$)

L 在 P 相对于 G 的 3 加速 $a^a = 0$ 两个惯性运动质点之间只有相对速度而无相对加速度.

§7.5 等效原理与局域惯性系. Equivalence Principle and Local Inertial Frames.

· 闵氏时空的任一惯性坐标系都是全局(整体)定义的(坐标线覆盖整个流形)

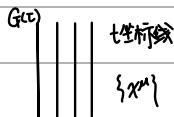
— 整体惯性坐标系 $\{t, x, y, z\}$.

$\{(\frac{\partial}{\partial t})^a, (\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial z})^a\}$ 为 G 上一个无自转正交归一标架场

惯性观者 $G(t)$ 是一条 t 坐标线 + 4 标架场 $\{(\frac{\partial}{\partial x})^a\}$

$$A^a = 0, \omega^a = 0$$

固有标架为 $\{x^a\}$

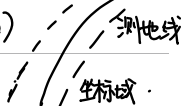


弯曲时空

(local Lorentz system, local Lorentz frame) $G(r)$

惯性观者 $\rightarrow$ 自由下落 (世界线为测地线) 的无自转观者 (4标架沿世界线平移)

惯性坐标系 $\rightarrow$ 自由下落无自转观者的固有坐标系 $\stackrel{\text{def}}{=} \text{局部惯性系}$



考虑爱因斯坦电梯 (Einstein's elevator) 引力场中自由下落。内部的静止观者失重且物体悬浮静止。



牛顿力学: 电梯观者是非惯性系 (相对于惯性系地球有重力加速度 $\vec{g}$)。

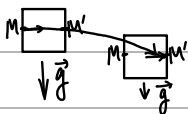
其认为物体受重力 $m_g \vec{g}$ 与惯性力 $-m_I \vec{g}$ 由于 $m_g = m_I$ 则物体受力平衡

爱因斯坦电梯内的一切力学 (室内引力作用忽略) 实验与远离各星球的惯性飞船内的相应实验有 (平时时空) 相同结果 [根本原因: $m_g = m_I$ 等效原理]

弱等效原理 (weak equivalence principle, WEP)

假设性推广至一切物理实验结果都一致 爱因斯坦等效原理 (Einstein equivalence principle, EEP)

$\Rightarrow$ 光的引力红移, 光在引力场中走曲线



地面观者观测到光线在引力场中走曲线

对等效原理的评价: 正面 - Misner, Thorne, Wheeler

负面 - Sygne

警告: 区分 $\left\{ \begin{array}{l} \text{由时空弯曲导致的真实引力效应} \\ \text{平时时空中由于观者世界线的弯曲 (非测地线) 导致的虚假引力效应} \end{array} \right.$

考虑一个远离星球 (平时时空无引力) 做匀加速运动的飞船 (非测地线)。



$\uparrow a = \vec{g}$ 飞船观者感觉自己置身于引力场中, 物体向下做匀加速运动, 惯性力为 $m_I \vec{g}$

平时时空中由于观者的非惯性运动导致的非真实的表现引力

黎曼曲率 $R_{abcd} = 0$

不是由物质产生, 不对应于时空弯曲。

① 爱因斯坦等效原理是等效原理的假设性推广, 引导广义相对论的诞生。

② 由狭义相对论至广义相对论

弯曲时空的物理定律遵守的原则:

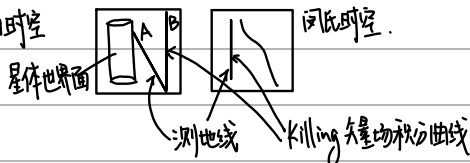
(a) 服从广义协变性原理.

(b) $g_{ab} \rightarrow \eta_{ab}$ 退化至狭义相对论相应定律. / (b') 服从爱因斯坦等效原理

② 等效原理是否存在反例: 加速带电粒子是否产生电磁辐射.

闵氏时空: 世界线为测地线的带电粒子无辐射, 世界线为非测地线的带电粒子有辐射

弯曲时空



闵氏时空.

由等效原理推广 A 应无辐射

由其余讨论 A 会产生辐射.

问题: 电磁辐射在弯曲时空中的定义 + 等效原理的表述不够清晰.

④ 存在互不相同的引力理论

{ 度规理论: 要求时空具有度规, 自由质点的世界线是该度规的测地线 ...
非度规理论

度规理论如: 广义相对论、Brans-Dicke 理论 (度规场 g_{ab} + 标量场 ϕ 描述引力).

判断引力理论的正确性 — 引力实验 利用等效原理考虑引力理论 (精确实验验证).

{ 任何引力理论都满足弱等效原理 WEP.

若爱因斯坦等效原理 EEP 成立, 则引力理论只能是度规理论

满足.

若强等效原理 (Strong equivalent principle) SEP 成立, 仅有 GR 满足 [猜测] 其余的度规理论都不

强等效原理 SEP: 讨论系统中物体所激发的 自引力场 [引力束缚能对惯性质量与引力质量有相同贡献]

· 局域惯性系的特点: 在其中物理规律表现得类似于闵氏时空

Prop 7-5-1 设 $G(\tau)$ 是弯曲时空的自由下落无自转观者 (爱因斯坦电梯观者), $g_{\mu\nu}$ 是度规 g_{ab}

在 $G(\tau)$ 的固有坐标系的分量, $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ 是与 g_{ab} 适配的导数算符 ∇_a 在该系的克氏符, 则

$$g_{\mu\nu}|_p = \eta_{\mu\nu} \quad \Gamma^\sigma_{\mu\nu}|_p = 0 \quad (\sigma, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \quad \forall p \in G$$

Pf: Prop 7-4-1 + 引理 7-4-3 + $A^a = 0, \omega^a = 0$

讨论电磁现象.

弯曲时空中麦克斯韦方程 $\nabla^a F_{ab} = -4\pi J_b$ $\nabla_{[a} F_{bc]} = 0$. 洛伦兹力 $qF^a_b u^b = u^b \partial_b p^a \equiv \frac{dp^a}{d\tau}$

在任一坐标中形式为
$$\begin{cases} F^{\mu}_{\nu;\mu} = -4\pi J_{\nu} & F_{[\nu\sigma;\mu]} = 0 \\ qF^{\mu}_{\nu} u^{\nu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} u^{\nu} p^{\sigma} \text{ (协变导数坐标分量)}. \end{cases}$$

$G(\tau)$ 线上的点处于其固有惯性系中 $\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}|_p = 0$

狭义相对论的形式 $\Rightarrow \begin{cases} F^{\mu}_{\nu;\mu} = -4\pi J_{\nu} & F_{[\nu\sigma;\mu]} = 0 \end{cases}$

[闵氏时空中整体惯性坐标系] $qF^{\mu}_{\nu} u^{\nu} = \frac{dp^{\mu}}{d\tau}$ 协变导数变为普通导数

符合爱因斯坦等效原理: 物理定律在局部惯性系(洛伦兹坐标系)的形式与

① GR前 假设性推广 它在闵氏时空洛伦兹坐标系的形式相同.

② GR后 由GR推导得出(如上).

Note: 结论仅对世界线 $G(\tau)$ 上的点成立, 偏离 $G(\tau)$ 无法保证 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$

若 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ 在 $G(\tau)$ 的一个邻域内为零, 则 $\forall p \in G$ 有

黎曼曲率 $R_{\mu\nu\rho}^{\sigma}|_p = (-2\partial_{[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\rho} + 2\Gamma^{\lambda}_{\rho[\mu}\Gamma^{\sigma}_{\nu]\lambda})|_p = 0$.

即 $G(\tau)$ 线上各点曲率为零, 与原先设定的对象弯曲时空不符.

仅对 $G(\tau)$ 上的点有 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = 0$.

$\Rightarrow$ 实验涉及的时空区域在世界线 $G(\tau)$ 的一个足够小时空邻域 U [等效原理近似成立]

时空曲率的效应只有在足够的时空范围内才能被显示出来.

例如: S^2 上顶点的 R_{abcd} 都不为零

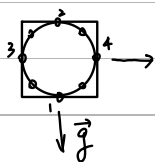
$\odot \Delta S \gg \Delta S$

仅从某点附近一小片球面 ΔS , 可用该点的切平面的一小部分 $\overline{\Delta S}$ 近似代替.

只要有一个坐标系的克氏符在坐标域中某点 p 为零 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}|_p = 0$, 此坐标为 p 点的一个局部洛伦兹系

§7.6 潮汐力与测地偏离方程. Tidal force & Geodesic deviation equation

· 假想实验 $\rightarrow$ 偏离世界线的地方 $\Gamma^\mu_{\nu\nu} \neq 0$



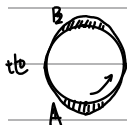
爱因斯坦电梯中有8个圆形放置的小球，引力场沿球心连线向下。

引力场强在1处大于2处 $\rightarrow$ 球1重力加速度大，两者间距增大

3, 4所受引力方向偏向于圆心 $\rightarrow$ 卵形。



物理模型：月球引起地球上的潮汐现象（忽略太阳影响）



地球表面被海水覆盖，处于月球引力场中。——非均匀引力场

A, B点受月球引力大小不同 $\Rightarrow$ 两点远离，海面向外鼓起 —— 涨潮（两次）

月 自转后 A, B 不再正对 $\Rightarrow$ 海面高度降低 —— 落潮（两次）

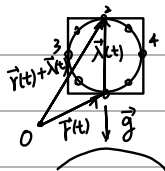
潮汐现象是引力场的普遍性质。

由牛顿引力论 $\vec{r}(t) = (x^1, x^2, x^3)$ $\vec{\lambda}(t)$ 为球2相对于球1的位矢

ϕ 为引力势 $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{\vec{r}}$

由牛顿第二定律 $\frac{d^2 (x^i + \lambda^i)}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{\vec{r} + \vec{\lambda}} \approx -\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{\vec{r}} - \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \Big|_{\vec{r}} \lambda^j$

$\Rightarrow \frac{d^2 \lambda^i}{dt^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_{\vec{r}} \lambda^j \quad i=1,2,3$



$\frac{d^2 \lambda^i}{dt^2}$ 是球2相对于球1的加速度，即潮汐加速度，取决于引力势 ϕ 的二阶偏导。

广义相对论（弱场低速近似为牛顿引力）

每个小球都可视为自由下落观者 $\rightarrow$ 世界线为以固有时 τ 为仿射参数的类时测地线

$\Rightarrow$ 时空中某个开域 U 上的一个测地线汇 (geodesic congruence)

$\Leftrightarrow$ 一个自由下落参考系。

横截曲线 $M_0(s)$: $M_0(s)$ 上任一点切矢都不与过该点的测地线相切

$\Rightarrow$ 标记与 $M_0(s)$ 相交的每一测地线为 $\gamma_s(\tau)$ ，且交点处固有时 $\tau=0$

U 上的类时矢量场 Z^a 对应于一个单参数微分同胚群 $\{\phi_\tau\}$ 。

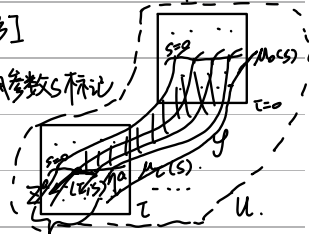
$M_\tau(s) \equiv \phi_\tau[M_0(s)]$ 为曲线 $M_0(s)$ 在 ϕ_τ 映射下的像。

$M_c(s)$ 组成子集 $\mathcal{Y}$, 其上每一点由两个实数 τ, s 决定 [2 维子流形]

$\mathcal{Y}$ 上所有测地线构成测地线汇的一个子集, 其中每条测地线可用参数 s 标记

⇒ 单参测地线族 (单参观察者族) — 铺出一个 2 维面 $\mathcal{Y}$

测地线汇中的所有测地线 — 充满时空域 U



一条横向曲线 $M_0(s)$ + 单参微分同胚群 $\{\phi_c\} \Rightarrow$ 单参测地线族 $\{Y_s(t)\}$?

测地线切矢场 Z^a 诱导的

$\mathcal{Y}$ 上的坐标基矢场 $Z^a \equiv (\frac{\partial}{\partial \tau})^a$ $\eta^a \equiv (\frac{\partial}{\partial s})^a$ 对易 $0 = [Z, \eta]^a = Z^b \nabla_b \eta^a - \eta^b \nabla_b Z^a$

证明 $\eta^a Z_a$ 沿任一测地线 $Y_s(t)$ 为常数:

$$Z^b \nabla_b (\eta^a Z_a) = \eta_a Z^b \nabla_b Z^a + Z_a Z^b \nabla_b \eta^a = Z_a Z^b \nabla_b \eta^a = Z_a \eta^b \nabla_b Z^a$$

$$\begin{aligned} & Z^a \text{ 为切矢, 沿测地线平移 } \quad = \frac{1}{2} \eta^b \nabla_b (Z_a Z^a) = 0. \\ & Z^a Z_a = -1 \end{aligned}$$

即开始时选 $M_0(s)$ 与所有 $Y_s(t)$ 正交, 则任一 $M_c(s)$ 与所有 $Y_s(t)$ 正交.

$\eta^a \rightarrow W^a$ 过该点的测地观察者的空间矢量 $W^a \in W_p$. Δs 甚为小量.

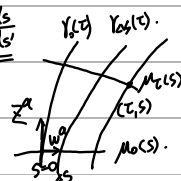
⇒ $Y_0(t)$ 与 $Y_{\Delta s}(t)$ 为球 1 与球 2 的世界线 $Y_0(t)$ 为基线观察者 (fiducial observer).

可对 $M(s)$ 重参数化为线长参数 s' , $M_c(s) = M_c(s')$ 则 $W^a \equiv (\frac{\partial}{\partial s'})^a = (\frac{\partial}{\partial s})^a \frac{ds}{ds'} = W^a \frac{ds}{ds'}$

$\lambda^a \equiv W^a \Delta s' \approx W^a \Delta s$ $\vec{\lambda}$ 即为 $\lambda^a = W^a \Delta s$ 位矢为空间矢量场 单位长

球 2 相对于球 1 (基线观察者) 的 3 速 $\tilde{u}^b = Z^a \nabla_a \lambda^b$

且是 $Y_0(t)$ 上的空间矢量场 $Z_b \tilde{u}^b = Z_b (Z^a \nabla_a \lambda^b) = Z^a \nabla_a (Z_b \lambda^b) - \lambda^b Z^a \nabla_a Z_b = 0$
 λ^b 为空间矢量 测地线方程.



球 2 相对于球 1 (基线观察者) 的 3 加速 $\tilde{u}^c \equiv Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b \lambda^c)$ 也是空间矢量场

⇒ 单参测地线族内与球 1 邻近的所有小球

$$\lambda^a = W^a \Delta s \quad \tilde{u}^b = Z^a \nabla_a \lambda^b = Z^a \nabla_a (W^b \Delta s)$$

$$\bar{\lambda}^a = W^a \Delta \bar{s} \quad \bar{\tilde{u}}^b = Z^a \nabla_a \bar{\lambda}^b = Z^a \nabla_a (W^b \Delta \bar{s} \frac{\Delta s}{\Delta \bar{s}}) = \frac{\Delta s}{\Delta \bar{s}} \tilde{u}^b$$

普适量[量度单位] 位矢: W^a 为分离矢量(separation vector).

3速: $U^b = Z^a \nabla_a W^a$ 3加速: $A^c = Z^a \nabla_a U^c = Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b W^c)$.

为球1(基征观者)测得的3速和3加速(潮汐加速度)

单参测地线族+族内一条基征测地线 $\gamma_0(\tau) \Rightarrow$ 确定的3速场 U^b 和3加速场 $A^c \leftrightarrow$ 时空曲率

Prop. 7-6-1 任-单参类时测地线族内任-基征测地线 $\gamma_0(\tau)$ 测得的潮汐加速度与时空的曲率张量有如下关系, 即测地偏离方程 (geodesic deviation equation)

$$A^c = -R_{abd} Z^a W^b Z^d$$

$$\text{Pf: } A^c = Z^a \nabla_a (Z^b \nabla_b W^c) \stackrel{[Z, W]^a=0}{=} Z^a \nabla_a (W^b \nabla_b Z^c) = \underbrace{Z^a W^b \nabla_a \nabla_b Z^c}_{p^c} + \underbrace{Z^a (\nabla_a W^b) \nabla_b Z^c}_{z^c}$$

$$p^c = Z^a W^b \nabla_b \nabla_a Z^c - Z^a W^b R_{abd} Z^d = W^b \nabla_b (\underbrace{Z^a \nabla_a Z^c}_0) - \underbrace{(W^b \nabla_b Z^a) \nabla_a Z^c}_{q^c} - R_{abd} Z^a W^b Z^d$$

$$[Z, W]^a = Z^b \nabla_b W^a - W^b \nabla_b Z^a = 0 \quad \quad \quad = Z^b \nabla_b W^a$$

$$\text{即 } p^c = -(Z^b \nabla_b W^a) \nabla_a Z^c - R_{abd} Z^a W^b Z^d = -q^c - R_{abd} Z^a W^b Z^d.$$

$$\Rightarrow A^c = -R_{abd} Z^a W^b Z^d$$

讨论 $A^c = -R_{abd} Z^a W^b Z^d$

1) 反映 A^c 与时空曲率张量 R_{abd} 密切联系

平直时空 $R_{abd}=0$ 则 $A^c=0$ 初始平行的测地族永远平行

弯曲时空 $R_{abd} \neq 0$ 不定 $A^c \neq 0$ (缩并) 但一定存在一个单参测地线族, 其测地偏离 A^c 非零

初始平行 $U^b|_{\tau=0} = Z^a \nabla_a W^b|_{\tau=0} = 0$, 即两邻近测地线开始时相对3速为零.

之后不再平行 $U^b|_{\tau \neq 0} \neq 0$ [§3.5 曲率张量非零 $\Leftrightarrow$ 存在初始平行后来不平行的测地线].

2) 描写两条无限邻近测地线相对加速度 A^c

分离矢量 W^a 描写两线分离情况

$W^a \neq 0$ 有分离

3速度 U^b (W^a 的1阶导数) 描写两线分离情况的变化

$U^b \neq 0$ 分量矢量变化

3加速度 A^c (W^a 的2阶导数) 描写两线偏离情况

$\downarrow$
 A^c 初为零 测地线未必偏离.

例如 平直时空 ① 平行测地线族. $U^b=0, A^c=0$ $////$ ② $U^b \neq 0, A^c=0$ $||$

3) 克氏符 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$ 依赖于坐标系, 局部惯性系中 $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}|_p = 0 \Rightarrow$ “失重”

黎曼张量 R_{abcd} 为几何量, $R_{abcd} \Rightarrow$ 潮汐加速度 a^c 无法通过坐标变换消除

测地偏离 处可以感受到引力效应 $R_{abcd} \neq 0 \Rightarrow$ 潮汐力

Δx 如此小 $\rightarrow$ 验证“时空曲率效应仅在足够的时空范围内显示”

(4) 纯数学考虑: 测地偏离方程对类时、类空、类光测地线族都成立.

T - 测地线的仿射参数, a^c 无潮汐加速度物理意义

分离矢量 $w^a \rightarrow \eta^a$ 不一定正交于 Z^a

度规为洛伦兹差别的时空 $\rightarrow$ 度规为非洛伦兹差别的空间 $\rightarrow (M, \nabla_a)$

则测地偏离方程为 $a^c = -R_{abcd} T^a \eta^b T^d$ $a^c \equiv T^a \nabla_a (T^b \nabla_b \eta^c)$

其中 R_{abcd} 为黎曼张量, $T \equiv (\frac{\partial}{\partial \lambda})^a$ 为基线测地线 $\gamma_0(\lambda)$ 的切矢, η^a 为 $\gamma_0(\lambda)$ 上的分离矢量

§7.7 爱因斯坦场方程 The Einstein Field Equation

1) 物质分布产生引力, 引力表现为时空弯曲 $\Rightarrow$ 时空曲率受物质分布(能动张量 T_{ab})影响

2) 牛顿引力论应是广义相对论的弱场低速近似 $\nabla^2 \phi = 4\pi\rho$

对比测地偏离方程与牛顿引力论的潮汐力表达式:

$$\text{牛顿: } \frac{d^2 w^i}{dt^2} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} w^j \Big|_{(x=w)} \quad a^c = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c w^b \partial_b \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right)$$

$$a^c = -w^b \partial_b \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^c \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^i}\right) \right] = -w^b \partial_b \partial^c \phi$$

$$\text{GR: } a^c = -R_{abcd} Z^a w^b Z^d \quad R_{abcd} Z^a Z^d \leftrightarrow \partial_b \partial^c \phi \text{ 取缩并 } c \rightarrow b$$

$$R_{ad} Z^a Z^d \leftrightarrow \nabla^2 \phi = 4\pi\rho = 4\pi T_{ab} Z^a Z^b \Big|_{T_{00}}$$

$$\text{期望 } R_{ab} Z^a Z^b = 4\pi T_{ab} Z^a Z^b \quad \text{猜测 } R_{ab} = 4\pi T_{ab}$$

由 §6.4 $\partial^a T_{ab} = 0$ 最小替换法则 $\rightarrow \nabla^a T_{ab} = 0 \Rightarrow \nabla^a R_{ab} = 0$

Branchi 恒等式 $\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 = \nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_c R_{bad}{}^e + \nabla_b R_{acd}{}^e$ 黎曼曲率 R_{abcd} 1,2 反对称

$c \rightarrow a$ 缩并 $\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_c R_{abd}{}^a + \nabla_b R_{acd}{}^a = 0$

$\nabla^a R_{bcd}{}^a - \nabla_c R_{bd} + \nabla_b R_{cd} = 0$ R_{abcd} 1,3 或 2,4 缩并 $\rightarrow$ 里奇张量 R_{bd}

d 升指标 $\rightarrow b$ 缩并 $\nabla^a R_{bc}{}^b{}_a - \nabla_c R_b{}^b + \nabla_b R_c{}^b = 0$ $R_b{}^b$ 1,2 缩并 $\rightarrow$ 标量曲率 R .

$\nabla^a R_{ca} - \nabla_c R + \nabla^b R_{cb} = 0 = 2 \nabla^a R_{ca} - \nabla_c R$. 里奇张量 R_{bd} 1,2 对称

若 $\nabla^a R_{ab} = 0$ 则 $\nabla_a R = 0$

$R = R_a{}^a = 4\pi T_a{}^a = 4\pi T$. $\Rightarrow \nabla_a T = 0$ 时空区域内 T_{ab} 的迹为常数.

例如理想流体 $T = T_a{}^a = \rho U_a U^a + p(\delta_a{}^a + U_a U^a) = -\rho + 3p$.
 $g_j = g \quad 4-1$

牛顿近似下 $\rho \gg p$ 故 $T \approx -\rho$ 即能量密度 ρ 在整个流体场中为常数

不符合理想流体的情况

$\Rightarrow \nabla^a R_{ab}$ 不应为零. 由此 $R_{ab} \rightarrow G_{ab} = 4\pi T_{ab}$ G_{ab} 为 (0,2) 型对称张量且 $\nabla^a G_{ab} = 0$

爱因斯坦张量 $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab}$ 且 $\nabla^a G_{ab} = 0$

假定 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 即 $R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$

可以在牛顿近似 $T \approx -\rho T$ 满足 $R_{ab} z^a z^b = 4\pi T_{ab} z^a z^b$

b 升指标 $\rightarrow a$ 缩并 $R - \frac{1}{2} R \delta_a{}^a = 8\pi T$. 即 $R = -8\pi T$

$R_{ab} = 8\pi T_{ab} + \frac{1}{2} (-8\pi T) g_{ab} = 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{2} T g_{ab})$.

牛顿近似

$R_{ab} z^a z^b = 8\pi (T_{ab} z^a z^b - \frac{1}{2} T g_{ab} z^a z^b) = 8\pi (\rho + \frac{1}{2} T) \approx 8\pi (\rho - \frac{1}{2} \rho) = 4\pi \rho = 4\pi T_{ab} z^a z^b$

广义相对论的基本假设 (1915). — 爱因斯坦场方程

描述时空曲率与物质场关系的方程 $G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab}$

讨论 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}$.

1) 闵氏时空 $R_{abcd} = 0 \Rightarrow G_{ab} = 0 \Rightarrow T_{ab} = 0$ 没有物质 $\times$.

狭义相对论忽略物质之间的引力作用(产生的引力场) 时空近似平直

狭义相对论物理学是广义相对论物理学在引力(时空曲率)可忽略时的近似

引力不可忽略 $\rightarrow$ 时空不能近似看作平直 $\rightarrow$ 不能使用狭义相对论

2) $T_{ab} = 0$ 真空爱因斯坦方程 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 0$ [称函数组 $g_{\mu\nu}$ 的一组非线性二阶偏微分方程]

选定坐标系 $\{x^\mu\}$. $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho})$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\mu\sigma,\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\sigma,\mu} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\nu_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\nu\sigma}\Gamma^\nu_{\lambda\mu}.$$

$R_{\mu\nu}(G_{\mu\nu})$ 对 $g_{\mu\nu}$ 的依赖关系高度非线性

□ 平直度规解: 闵氏度规 □ 弯曲度规解: 施瓦西真空解(静态球对称)...

$T_{ab} = 0 \Rightarrow$ 标量曲率 $R = 0$ 真空爱因斯坦方程 $R_{ab} = 0$

— 真空度规 g_{ab} 的黎曼张量等于其外尔张量.

3) $T_{ab} \neq 0$ 有源爱因斯坦方程 施瓦西内部解、宇宙 FLRW 解...

类比有源麦克斯韦方程 $\nabla^\mu T_{ab} = -4\pi J_b$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{背景约定好给平4电流矢量 } J^a \text{ 求解电磁场张量 } F^{ab} \\ \text{线性方程组, 解的线性叠加仍是解} \end{array} \right.$

有源爱因斯坦方程 $R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{联立求解描述物质场的量 } T_{ab} \text{ 与度规 } g_{ab} \\ \text{非线性方程组, 解的线性叠加未必是解} \end{array} \right.$

例如尘埃(压强 $p=0$ 的理想流体) $T_{ab} = \rho U_a U_b$

$U_a = g_{ac} U^c$, U^a 类时归一矢量场 都涉及度规 g_{ab} , 无法将 T_{ab} 作为已知量

4) $\nabla^a G_{ab} = 0 \leftrightarrow \nabla^a T_{ab} = 0$ 含有物质运动的信息.

对理想流体: $\nabla^a T_{ab} = 0$ 为物质场运动方程. (尘埃) 尘埃粒子世界线为测地线

$\Rightarrow$ 推广至自引力足够弱的是多个小物体.

§7.8 线性近似和牛顿近似 Linear Approximation and the Newtonian Limit.

7.8.1 线性近似 [线性引力论] (linearized theory of gravity)

· 近似目的:

① 简化问题为线性. $\Rightarrow$ 适用于包含的引力场很弱的情况

例如: 引力波 (gravitational wave) 遥远地方传播至地球时引力场很弱

间接探测 — (1973 Nobel Prize) 探测脉冲双星 (binary pulsars)

转动周期变短

两星体围绕体系中心转动, 释放引力波带走能量, 体系能量减小表现为转动半径减小

直接探测 — (2017 Nobel Prize) LIGO 探测器 探测到双黑洞合并的引力波信号

2023 FAST 纳赫兹引力波 (频率 10^{-9} Hz, 周期数年, 波长数光年).

引力波源 — 恒星晚期引力坍塌 (gravitational collapse)、超新星爆发 (supernova explosion) ...

② 验证牛顿引力论是广义相对论的弱场低速近似.

· 线性引力论背景时空 $(\mathbb{R}^4, g_{ab})$.

弱引力场条件: 时空度规 g_{ab} 接近闵氏度规 η_{ab}

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} \quad \gamma_{ab} \text{ 在 } \eta_{ab} \text{ 的某个洛伦兹坐标系 } \{x^\mu\} \text{ 的分量 } |\gamma_{\mu\nu}| \ll 1.$$

背景度规 η_{ab} (固定不变) + 微扰 γ_{ab} (物理场随时间演化, 2阶项和高阶项可忽略).

约定张量指标升降用 η_{ab} 与 η^{ab} 但 g^{ab} 定义为 $g^{ab}g_{ac} = \delta^b_c$.

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab}.$$

$$\begin{aligned} \text{验证: } g^{ab}g_{ac} &= (\eta^{ab} - \gamma^{ab})(\eta_{ac} + \gamma_{ac}) = \delta^b_c + \underbrace{\eta^{ab}\gamma_{ac} - \eta_{ac}\gamma^{ab} - \gamma^{ab}\gamma_{ac}}_{\text{2阶项忽略}} \\ &\cong \delta^b_c \end{aligned}$$

$\eta_{ac}\gamma^{ab} = \eta_{ac}\eta^{aa'}\eta^{bb'}\gamma_{a'b'} = \delta^a_c\eta^{bb'}\gamma_{a'b'} = \gamma^{bb'}_{cb}$

设 ∂_a 和 ∇_a 是 η_{ab} 和 g_{ab} 对应的导数算符

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}.$$

$$R_{abcd} = -2\partial_{[a}\eta^{bd}{}_{c]} + 2\eta^{bd}\partial_{[a}\eta^{c]}_{.$$

$$R^d{}_{bc} = \frac{1}{2}g^{de}(\partial_b g_{ce} + \partial_c g_{be} - \partial_e g_{bc}) = \frac{1}{2}(\eta^{de} - \gamma^{de})[\partial_b \gamma_{ce} + \dots] \quad \partial_a \eta_{bc} = 0$$

物理量.

1阶近似的 $\Gamma^{(1)c}_{ab} = \frac{1}{2} \eta^{cd} (\partial_a \gamma_{bd} + \partial_b \gamma_{ad} - \partial_d \gamma_{ab})$.

线性黎曼张量 (黎曼张量的1阶近似) ab对称.

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{abc}{}^d &= -2\partial_{[a} \Gamma^{(1)d}_{b]c} = -\eta^{de} (\partial_a \partial_{[b} \gamma_{c]e} + \partial_c \partial_{[a} \gamma_{b]e} - \partial_e \partial_{[a} \gamma_{b]c}) \\ &= -\eta^{de} (\partial_c \partial_{[a} \gamma_{b]e} - \partial_e \partial_{[a} \gamma_{b]c}) = \partial^d \partial_{[a} \gamma_{b]c} - \partial_c \partial_{[a} \gamma_{b]d}. \end{aligned}$$

线性里奇张量 (里奇张量的1阶近似)

$\gamma \quad \partial^c \partial_b \gamma_{ac}$

$$\begin{aligned} R^{(1)}_{ab} &\equiv R^{(1)}_{acb}{}^c = \partial^c \partial_{[a} \gamma_{b]c} - \partial_b \partial_{[a} \gamma_{c]c} = \frac{1}{2} (\partial^c \partial_a \gamma_{cb} - \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \partial_b \partial_a \gamma_c{}^c + \partial_b \partial_c \gamma_a{}^c). \\ &= \partial^c \partial_{(a} \gamma_{b)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma \end{aligned}$$

线性标量曲率 (标量曲率的1阶近似)

$$R^{(1)} \equiv \eta^{ab} R^{(1)}_{ab} = \eta^{ab} \partial^c \partial_{(a} \gamma_{b)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma - \frac{1}{2} \eta^{ab} \partial_a \partial_b \gamma = \partial^c \partial^b \gamma_{cb} - \partial^c \partial_c \gamma$$

线性爱因斯坦张量 (爱因斯坦张量的1阶近似)

$$G^{(1)}_{ab} \equiv R^{(1)}_{ab} - \frac{1}{2} R^{(1)} \eta_{ab} = (\partial^c \partial_{(a} \gamma_{b)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma) - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \partial^d \gamma_{cd} - \partial^c \partial_c \gamma)$$

线性爱因斯坦方程 (linearized Einstein equation)

$$\partial^c \partial_{(a} \gamma_{b)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \partial^d \gamma_{cd} - \partial^c \partial_c \gamma) = 8\pi T_{ab}$$

令 $\bar{\gamma}_{ab} \equiv \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma \quad -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} + \partial^c \partial_{(a} \bar{\gamma}_{b)c} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T_{ab}$.

四维闵氏时空中的麦克斯韦方程 $\partial^a F_{ab} = -4\pi J_b \quad F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \Rightarrow \partial^a \partial_a A_b - \partial_b \partial^a A_a = -4\pi J_b$

设 χ 为任一标量场 规范变换 $\tilde{A}_a = A_a + \partial_a \chi \Rightarrow \tilde{F}_{ab} = F_{ab}$ 对应相同的 F_{ab}

选洛伦兹规范 $\partial^a A_a = 0$

麦克斯韦方程 $\partial^a \partial_a A_b = -4\pi J_b$

线性爱因斯坦方程中的规范自由度:

设 ξ^a 是任意无迹小矢量场 线性引力的规范变换 $\tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$

∂_a 与 ∂_b 的可交换性. $\Rightarrow \tilde{R}^{(1)}_{abc}{}^d = R^{(1)}_{abc}{}^d$ 对应于相同的线性黎曼张量 $R^{(1)}_{abc}{}^d / R^{(1)}_{ab} / G^{(1)}_{ab}$

线性引力的洛伦兹规范条件 $\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0$ [可以证明 γ_{ab} 的等价类中存在子类满足此规范].

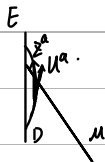
洛伦兹规范下的线性爱因斯坦方程 $\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab}$.

7.8.2 牛顿极限.

例如地球周围的引力场中

E 与 D 是地球和地面大炮发出的炮弹的世界线 (相对速率 $u_{ED} \ll 1$).

M 是导通射线中某质点 (地球观者) M 的世界线 (相对速率 $u_{ME} \approx 1$)



低速条件: 存在 η_{ab} 的惯性坐标系 $\{t, x^i\}$ 在其中讨论对象的坐标速率都远小于 1.

弱场条件: $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$ γ_{ab} 是小量即 $|\gamma_{\mu\nu}| = |g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1$.

$\{t, x^i\}$ 满足 1) 引力场源的能动张量可表为 $T_{ab} \approx \rho (dt)_a (dt)_b$ ($T_{00} = \rho, T_{0i} \approx 0, T_{ij} \approx 0$).

动量密度 T_{0i} 由于物体低速运动而很小. 3 维应力 T_{ij} 与质量密度 ρ 相较可忽略.

——牛顿引力论中仅有质量密度 ρ 对引力场有贡献

1) a. 引力场源低速运动导致时空几何缓慢变化 $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial t} \approx 0$

b. 物体低速运动导致其 4 速 U^a 近似于 $\{t, x^i\}$ 观者的 4 速 $Z^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ $U^a \approx Z^a$

洛伦兹规范下的线性爱因斯坦方程分量形式两边.

$$\partial^\sigma \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \partial^\sigma \partial_\sigma \bar{\gamma}_{\mu\nu} \approx \partial^i \partial_i \bar{\gamma}_{\mu\nu} \approx \partial^i \partial_i \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \nabla^2 \bar{\gamma}_{\mu\nu}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \bar{\gamma}_{00} = -16\pi T_{00} = -16\pi \rho \\ \nabla^2 \bar{\gamma}_{0i} = -16\pi T_{0i} = 0 \\ \nabla^2 \bar{\gamma}_{ij} = -16\pi T_{ij} = 0 \end{array} \right.$$

在很远处表现良好的唯一解 $\bar{\gamma}_{0i}$ 和 $\bar{\gamma}_{ij}$ 为常数, 可通过规范变换消除
 $\bar{\gamma}_{0i} = 0$ $\bar{\gamma}_{ij} = 0$.

令 $\phi = -\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{00}$ 解释为牛顿引力势

牛顿引力论中的泊松方程 $\nabla^2 \phi = 4\pi \rho$. [物质如何产生引力场].

地球表面物体自由落体, 沿测地线运动.

$$\frac{dx^\mu}{dt} = 0 \text{ (速度近似零)}.$$



在 $\{t, x^i\}$ 中 $\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = 0$ ($t \approx \tau, U^a \approx Z^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$). $x^0 = t, \frac{dx^0}{dt} = 1$

$$\mu=0 \quad \frac{d^2 x^0}{dt^2} = -\Gamma^0_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = -\Gamma^0_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

$$0 = -\Gamma^0_{00} = 0 \text{ trivial}$$

$$\mu=i \quad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\sigma}{dt} = -\Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt}$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^{\mu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} (\gamma_{\lambda,\sigma} + \gamma_{\sigma,\lambda} - \gamma_{\sigma,\lambda})$$

$$\bar{\gamma}_{ab} \equiv \bar{\gamma}_{00}(dt)_a(dt)_b = -4\phi(dt)_a(dt)_b$$

$$\bar{\gamma} \equiv \eta^{ab} \bar{\gamma}_{ab} = \bar{\gamma}_{00} \eta^{ab}(dt)_a(dt)_b = -\bar{\gamma}_{00} = 4\phi$$

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma \Rightarrow \gamma = \eta^{ab} \gamma_{ab} = \eta^{ab} \bar{\gamma}_{ab} + \frac{1}{2} \eta^{ab} \eta_{ab} \gamma = \bar{\gamma} + 2\gamma \quad \text{即 } \gamma = -\bar{\gamma} = -4\phi$$

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \bar{\gamma} = -4\phi(dt)_a(dt)_b - \frac{1}{2} \eta_{ab} \cdot 4\phi = -\phi [(dt)_a(dt)_b + 2\eta_{ab}]$$

$$\Rightarrow \Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} \eta^{00} (\gamma_{00,0} + \gamma_{00,0} - \gamma_{00,0}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t} \cong 0$$

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\gamma_{j0,0} + \gamma_{0j,0} - \gamma_{00,j}) = -\frac{1}{2} \delta^{ij} \gamma_{00,j} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i} \quad i=1,2,3$$

$$\gamma_{j0} = \bar{\gamma}_{j0} + \frac{1}{2} \eta_{j0} \gamma = 0 + \frac{1}{2} \times 0 \times 4\phi = 0$$

由此 $\mu=i$ 时测地线方程变为 $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^i} \quad \gamma_{00} = \bar{\gamma}_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} \bar{\gamma} = -4\phi + \frac{1}{2} \times 4\phi = -2\phi$

→ 质点相对 $\{t, x\}$ 系的 3 加速 $\vec{a}$ 的分量 $\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^i}$

牛顿引力论中仅受引力的质点运动方程 $\vec{a} = -\vec{\nabla} \phi$ [引力场如何影响物质运动]

⇒ 牛顿引力论是广义相对论的弱场低速极限

由 $\phi = -\frac{1}{2} \bar{\gamma}_{00} = -\frac{1}{2} \gamma_{00}$ 得 $g_{00} = \eta_{00} + \gamma_{00} = -(1+2\phi)$

$\phi = -\frac{1}{2}(1+g_{00})$ 牛顿近似下度规分量 g_{00} 同牛顿引力势的关系

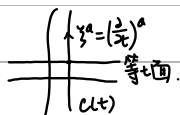
第8章 爱因斯坦方程的求解 Chapter 8 Solving the Einstein Equation

§8.1 稳态时空和静态时空. Stationary spacetime and static spacetime.

Def 1 时空 (M, g_{ab}) 称为稳态的 (stationary), 若存在类时 Killing 向量场 ξ^a g_{ab} 称为稳态时度.

设类时向量场 ξ^a 积分曲线参数为 t , 即 $\xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 为 ξ^a 的逆面坐标

以 t 为第零分量 ($t=x^0$), ξ^a 的积分曲线 $C(t)$ 为 x^0 坐标线的任一坐标系 $\{x^i\}$



在此坐标系下度规分量为 $g_{\mu\nu}$ $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0$ [Claim 4-2-2]

$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i)$ 全部 $g_{\mu\nu}$ 都与时间坐标 t 无关, 具有时间平移不变性 $\Leftrightarrow$ 稳态.

若 (M, g_{ab}) 中存在局部坐标系 $\{x^i\}$ 使 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$ ($t=x^0$ 为类时坐标)

则 $\xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是坐标域 O 上的光滑向量场且 $\{x^i\}$ 是 ξ^a 的逆面坐标 $\Rightarrow (\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$

在 O 上有 $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ 故 $\xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是类时 Killing 向量场

稳态时空的坐标语言定义: 若存在局域坐标系 $\{x^i\}$ (坐标域为 O) 使 g_{ab} 的全部分量与类时坐标 x^0 无关

则至少 (O, g_{ab}) 是稳态时空.

稳态时空 $\longleftrightarrow$ 不随时间变化的引力场

借用观者判断引力场的稳态 (度规分量不随时间变化) 时需要选择恰当的观者 (参考系):

观者的世界线重合于类时 Killing 向量场的积分曲线

例 1: 闵可夫斯基时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 其沿 ξ^a 坐标系 $\{x^i\}$ 的第零坐标基向量场 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是类时 Killing 向量场

例 2: 2 维时空度规在某坐标 $\{t, x\}$ 下写作 $ds^2 = -t^2 dt^2 + dx^2$ 取坐标变换 $T = t^{-1}$ $dT = -t^{-2} dt$

$\Rightarrow$ 在 $\{T, x\}$ 下 $ds^2 = -dT^2 + dx^2$ 稳态. 稳态性是时空的内禀可识别性质, 不因坐标选择而变

Def 2 (M, g_{ab}) 中的向量场 V^a 称为超曲面正交的 (hypersurface orthogonal)

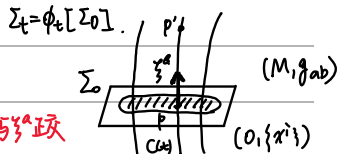
若 $\forall p \in M$ 存在超曲面 Σ 使 $p \in \Sigma$ 且 Σ 处处与 ξ^a 正交

Def 3 时空 (M, g_{ab}) 称为静态 (static), 若它存在超曲面正交的类时 Killing 向量场 g_{ab} 为静态度规

静态时空必为稳态, 反之不然.

Claim 8-1-1 设 $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是 Killing 矢量场, $\Sigma_0 = \{p \in M | t(p) = 0\}$

是处处与 ξ^a 正交的超曲面, 则超曲面 $\Sigma_t = \{p \in M | t(p) = t\}$ 也处处与 ξ^a 正交



构造适当的坐标系法: 设静态时空 (M, g_{ab}) 上的类时 Killing 矢量场为 $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$, Σ_0 为与 ξ^a 正交的超曲面.

1. ξ^a 的积分曲线 $C(t)$ 与 Σ_0 的交点 p 选作曲线参数的零点 $t(p) = 0$ 在 Σ_0 上选局域坐标系 $\{x^i\}$

2. Σ_0 上各点的 $\xi^a \neq 0 \Rightarrow$ 利用 ξ^a 的积分曲线将 3 个坐标“携带”至 Σ_0 以外

积分曲线上各点 $C(t)$ 处的 x^i = 积分曲线与 Σ_0 的交点的 x^i

3. 积分曲线的参数 t 作为线上每点类时坐标 x^0 (Killing 时间坐标)

$\Rightarrow$ 4 维局域坐标系 $\{t, x^i\}$ 类时坐标基矢 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 与类空坐标基矢 $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$ 正交 [超曲面正交性].

故 $g_{0i} = g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial x^i})^b = 0 \quad i=1,2,3$.

$\{t, x^i\}$ 为时轴正交坐标系

$ds^2 = g_{00}(x^1, x^2, x^3) dt^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j$ (time-orthogonal coordinate system).

稳态时空具有时间平移不变性 / 静态时空具有时间平移不变性和时间反射不变性

设 $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是超曲面正交的类时 Killing 矢量场

时间反射变换为微分同胚映射 $\phi: M \rightarrow M$ 满足 $t[\phi(p)] = -t(p)$, $x^i[\phi(p)] = x^i(p)$.

时间平移变换为微分同胚映射 $\phi_t: M \rightarrow M$ 满足 $t[\phi_t(p)] = t(p) + t_0$, $x^i[\phi_t(p)] = x^i(p)$.

对称性

由 Killing 矢量场 ξ^a 诱导的单参微分同胚群 $\{\phi_t | t \in \mathbb{R}\}$ 是单参等度规群, 其中 ϕ_t 是等度规变换, 故具有时间平移

下证 ϕ 是等度规映射 $\Rightarrow$ 具有时间反射对称性:

设 $C(t)$ 为 ξ^a 过 p 的积分曲线

$C(t) = p \uparrow \xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 先证 $\phi_* [(\frac{\partial}{\partial t})^a]_p = -(\frac{\partial}{\partial t})^a|_q$ $\phi_* [(\frac{\partial}{\partial x^i})^a]_p = (\frac{\partial}{\partial x^i})^a|_q \quad i=1,2,3$.

$\phi(p) = q \downarrow C(t)$ g_{ab} 和 $(\phi^* g)_{ab}$ 在 $\{t, x^i\}$ 系的分量为 $g_{\mu\nu}$ 和 $(\phi^* g)_{\mu\nu}$

$(\phi^* g)_{00}|_p = [(\phi^* g)_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial t})^b]|_p = [g_{ab} (\phi_* (\frac{\partial}{\partial t})^a) (\phi_* (\frac{\partial}{\partial t})^b)]|_q = [g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial t})^b]|_q = g_{00}|_q$

由于 $0 = (L_{\xi} g)_{\mu\nu} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t}$ 即 $g_{\mu\nu}$ 沿 $C(t)$ 为常数 $g_{00}|_q = g_{00}|_p$. 同理 $(\phi^* g)_{ij}|_p = g_{ij}|_p$

$(\phi^* g)_{0i}|_p = -g_{0i}|_p = 0$ 故 $(\phi^* g)_{\mu\nu}|_p = g_{\mu\nu}|_p \quad \forall p \in M$ 故 $(\phi^* g)_{ab} = g_{ab}$ $\phi: M \rightarrow M$ 为等度规映射

§8.2 球对称时空 Spherically symmetric spacetime

3维欧氏空间 $(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$ 中的2维球面 (S^2, h_{ab}) $ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

具有最高对称性的空间 Killing 向量场个数 $\frac{1}{2}n(n+1) = 3$

$\zeta_1^a = (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ 反映 (S^2, h_{ab}) 具有绕 z 轴旋转不变性, 其积分曲线为球面上所有纬线

$$\zeta_2^a = (\frac{\partial}{\partial \theta})^a \sin\varphi + (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a \cot\theta \cos\varphi \quad \zeta_3^a = (\frac{\partial}{\partial \theta})^a \cos\varphi - (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a \cot\theta \sin\varphi$$

一个 Killing 向量场对应的单参数同胚群是单参数等度规群

李群补记: 群 G 上有元素 g, g' , 称为 $g, g' \in G$, G 与 G' 之间存在映射 $P: G \rightarrow G'$

李群既是一个群也是一个流形, 群上乘法映射与逆元映射都是 C^∞

[群] 同态 (homomorphism) $P(g_1 g_2) = P(g_1) \cdot P(g_2) \Rightarrow$ 同构 (isomorphism) P 为一一对应的.

[李群] 微分同胚 (diffeomorphism) $f: M \rightarrow M' \rightarrow$ 到上且 f, f^{-1} 为 C^∞ 的 $\Rightarrow$ 李群同构 $G_i = SO(3)$

$\Rightarrow (S^2, h_{ab})$ 上所有等度规映射的集合是个3参数群 (群维数为3) 同构于3维欧氏空间的转动群 $SO(3)$

流形 M 上给定一个光滑向量场 $V^a \mapsto \{t \in \mathbb{R} \mid t \in \mathbb{R}\}$ 为单参数微分同胚群 $\dim G_d = \infty$ — M 上的微分同胚群

M 上所有微分同胚映射组成的集合 $G_d = \{d\text{iff}: M \rightarrow M\}$ 是一个群乘法为映射复合的李群

配以度规 (M, g_{ab}) 由定义 Killing 向量场 $\zeta^a \mapsto$ 单参数等度规群

M 上所有等度规映射构成的群 $G_i \equiv \{iso: M \rightarrow M\}$ $\dim G_i \leq \frac{n(n+1)}{2}$ — M 上的等度规群

单参数微分同胚群 $G_t = \{t \in \mathbb{R}\}$ 中的任意元素作用于 $\forall p \in M$ 所得的点的集合称为 G_t 的过 p 点的一条轨道

$\Rightarrow$ 推广至 M 上微分同胚群的任一群 [等度规群]

如 G_3 为 (S^2, h_{ab}) 上的等度规群 ($=SO(3)$) 则 G_3 过 $\forall p \in S^2$ 的轨道为 S^2 本身.

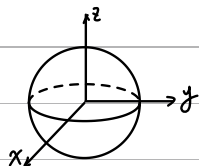
Def 1 时空 (M, g_{ab}) 称为球对称的 (spherically symmetric) 若其等度规群含有一个与 $SO(3)$ 同构的子群 $G_3 \subset G_i$

且 G_3 的所有轨道 (不动点除外) 都是2维球面, 这些球面称为轨道球面.

Note: ① 球对称时空的等度规群 $G_i \supset SO(3)$ 群

如同何时空的等度规群有10个参数但有同构于 $SO(3)$ 的子群且其轨道除一个不动点外都是2维球面

② 时空 = 度规场 + 物质场 都为球对称 $\Rightarrow$ 球对称时空.



等度规群中与 $SO(3)$ 同构的子群 G_3 对应于 3 个独立的 Killing 向量场 $\xi_1^a, \xi_2^a, \xi_3^a$

设 γ 是 G_3 的一个轨道 (2 维球面), 则 $\xi_1^a, \xi_2^a, \xi_3^a$ 从 γ 上任一点出发的积分曲线



都身在 γ 上 $\Rightarrow \xi_1^a, \xi_2^a, \xi_3^a$ 切于球面 γ

闵氏时空果惯性系的同时面 Σ_t

γ 上的 $\xi_1^a, \xi_2^a, \xi_3^a$ 用 g_{ab} 在 γ 上诱导的度规 $\hat{g}_{ab}$ 衡量也是 Killing 向量场 $\Rightarrow (\gamma, \hat{g}_{ab})$ 为最高对称性空间 $\hat{g}_{ab} = K \delta_{ab}$

即存在常数 $K > 0$ 和坐标 $\{\theta, \varphi\}$ 使 $d\hat{s}^2 = K(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

例如 4 维闵氏时空 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \stackrel{K>0}{=} -dt^2 + dr^2 + d\hat{s}^2$

K 为轨道 2 球面 γ 半径的平方。

例如 非平直时空. $K \propto$ 轨道 2 球面的面积. 设 $\hat{\Sigma}$ 是 γ 上 $\hat{g}_{ab}$ 逆元的面积元

$$A = \int_{\gamma} \hat{\Sigma} = \int_{\gamma} \sqrt{\hat{g}} d\theta d\varphi = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta = 4\pi K. \quad K = \frac{A}{4\pi} \text{ 定义半径 } r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{1/2} \Rightarrow K = r^2$$

半径 r 不具有 γ 上各点到球心的物理意义:

① 时空流形上不存在可以被称为 γ 的球心的点. 球心 $\notin \mathbb{R} \times S^1$

② 由于度规弯曲 γ 上各点到球心的距离定义与半径不同.

③ 存在不止一个球心.

§8.3 施瓦西真空解 Schwarzschild vacuum solution

8.3.1 静态球对称度规 Static, spherically symmetric metric

Claim 8-3-1 设静态球对称时空 (M, g_{ab}) 只有个起曲面正交的类时 Killing 向量场 ξ^a , 则其等度规群中与 $SO(3)$ 同构的子群 G_3 的所有轨道球面必与 ξ^a 正交.



设 Σ 是与 ξ^a 正交的起曲面, 则 G_3 过任一点的轨道球面身就在 Σ 上.

静态线元表述 $ds^2 = g_{00}(x^1, x^2, x^3) dt^2 + g_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j$

球对称性简化线元：坐标系 $\{t, r\} = \{t, r, \theta, \varphi\}$

- r 定义为它所在的轨道球面半径。

$$\text{满足 } ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

- θ, φ ：在 Σ 上某一轨道球面 φ 任意选球坐标 θ, φ ， φ 是 Σ 上的 2 维超曲面，其上有切于 Σ 的归一化类时 N^α

N^α 和曲线处处与轨道球面正交，且可以携带 θ, φ 至其轨道球面。 $\Rightarrow \Sigma$ 上有局域坐标系 $\{\theta, \varphi\}$ 。

$$\text{由此类时 } N^\alpha \text{ 的积分曲线与 } r \text{ 坐标线重合} \quad g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)^b = 0 \quad g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^b = 0$$

$$g_{ij} dx^i dx^j \text{ 中交叉项 } dr d\theta, dr d\varphi \text{ 项为零} \Rightarrow ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\text{静态} \rightarrow g_{00}, g_{11} \text{ 不是 } t \text{ 的函数} \quad \text{球对称} \rightarrow g_{00}, g_{11} \text{ 不是 } \theta, \varphi \text{ 的函数} \Rightarrow g_{00} = g_{00}(r) \quad g_{11} = g_{11}(r)$$

$$\text{假设 } ds^2 = -e^{2A(r)} dt^2 + e^{2B(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

有唯一静态 Killing 矢量场的球对称度规在坐标系 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 的一般线元

8.3.2 施瓦西真空解 Schwarzschild vacuum solution

满足真空爱因斯坦方程的静态球对称度规称为施瓦西真空解 (Schwarzschild vacuum solution)

$$\text{真空爱因斯坦方程 } R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0 \quad \text{两边缩并 } g^{ab} \quad R - \frac{1}{2} R \times 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow R = 0 \quad \Leftrightarrow R_{ab} = 0$$

$$g_{\mu\nu} \mapsto \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \mapsto R_{\mu\nu} = 0 \quad \text{求解 } A(r), B(r):$$

$$R_{00} = -e^{2(A-B)} (-A'' + A'B' - A'^2 - 2r^{-1}A')$$

$$R_{11} = -A'' + A'B' - A'^2 + 2r^{-1}B'$$

$$R_{22} = -e^{2B} [1 + r(A'-B')] + 1$$

$$R_{33} = -\{e^{2B} [1 + r(A'-B')] - 1\} \sin^2\theta$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{00} = 0 \\ R_{11} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A' = -B' \text{ 故 } A = -B + \alpha \quad (\alpha \text{ 为常数}) \\ \Rightarrow e^{2B} = \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} \quad (C \text{ 为积分常数}) \\ e^{2A} = \left(1 + \frac{C}{r}\right) e^{2\alpha} \end{array}$$

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) e^{2\alpha} dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

定义新坐标(吸收相因子) $\tilde{t} = e^{\alpha} t$ 由于 α 为常数 $\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^0$ 也是 Killing 矢量场 $\tilde{t} \rightarrow t$

$$\text{施瓦西真空解 } ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$r \rightarrow \infty$ 施瓦西度规回到球坐标系的闵氏度规 $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

$\Rightarrow$ 施瓦西度规是渐近平直的

r 足够大时 广义相对论的线性近似适用 $(1 + \frac{C}{r})^{-1} \approx 1 - \frac{C}{r}$

$$ds^2 = \underbrace{[-dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]}_{\text{flat}} - \frac{C}{r}(dt^2 + dr^2)$$

$$\Rightarrow g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$$

$$\gamma_{00} = -\frac{C}{r} \quad \text{牛顿引力势 } \phi = -\frac{1}{2}\gamma_{00} = \frac{C}{2r} = -\frac{M}{r} \quad \text{可知 } C = 2M$$

施瓦西真空解 $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ 其中 M 为星体质量.

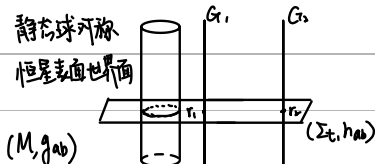
· 讨论一个静态球对称恒星外部的空间几何

G_1, G_2 为静态观者 (垂直于 Killing 矢量场的积分曲线)

两者的 θ, φ 坐标一致, r 坐标分别为 r_1, r_2 .

静态球对称

恒星表面世界面

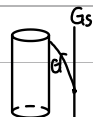


黎曼空间中两点距离定义为连接两点所有曲线中最短线 (θ, φ 为常数) 线长

$$\Sigma_t \text{ 上 } p_1, p_2 \text{ 之间线长 } l = \int \sqrt{h_{ij} dx^i dx^j} = \int_{r_1}^{r_2} (1 - \frac{2M}{r})^{-\frac{1}{2}} dr > r_2 - r_1 \quad \text{坐标距离}$$

l 为 G_1 和 G_2 的固有距离 (proper distance) 反映 (Σ_t, h_{ab}) 的非欧性

8.3 引力场的时空弯曲理解 - 重力加速度



广义相对论四维观点: 下落物体被观测地运动, $\ddot{r}$ 加速为零; 静态观者 $\ddot{r}$ 加速非零 $A^a = \nabla^a \ln \chi$

下落物体所受的重力加速度是 G 在 t 时刻相对于 G_2 的 3 加速 a^a $\vec{g} = a^a$ } $\vec{g} = -A^a$

由等效原理 平直时空 $\Leftrightarrow$ 弯曲时空. 瞬时静止观者 G_1 测 G_2 所得 3 加速 A^a

$$A_a = \nabla_a \ln \chi = (d \ln \chi)_a = \chi^{-1} (d\chi)_a$$

$$\chi = (-g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \xi} \frac{\partial x^b}{\partial \xi})^{\frac{1}{2}} = [-g_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial \xi} \frac{\partial x^b}{\partial \xi}]^{\frac{1}{2}} = (-g_{ab})^{\frac{1}{2}} = (1 - \frac{2M}{r})^{\frac{1}{2}}$$

$$= (1 - \frac{2M}{r})^{-1} \frac{M}{r^2} (dr)_a$$

$$d\chi = (1 - \frac{2M}{r})^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} (\frac{2M}{r^2}) dr$$

$$|\vec{g}| = |A^a| = (g_{ab} A^a A^b)^{\frac{1}{2}} = (g^{ab} A_a A_b)^{\frac{1}{2}} = [(1 - \frac{2M}{r})^{-2} \frac{M^2}{r^4} g^{ab} (dr)_a (dr)_b]^{\frac{1}{2}} = (1 - \frac{2M}{r})^{-\frac{1}{2}} \frac{M}{r^2}$$

$$= \frac{GM}{r^2} (1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{-\frac{1}{2}} \quad g^{ab} = (1 - \frac{2M}{r})$$

代入地球表面数据 $M = M_{\oplus} = 6 \times 10^{24}$ $r = r_{\oplus} = 6.4 \times 10^6$ $C = 3 \times 10^8$ $G = 6.7 \times 10^{-11}$

$$|g| \equiv \frac{GM_{\oplus}}{r_{\oplus}^2} \approx 9.8$$

- ① 稳态时空存在 $-A^a = -\nabla^a \ln C$ 的引力场。是地球引力场 $\vec{g}$ 的广义相对论表述 [可通过坐标变换消除]
- ② 非稳态时空没有稳态观者 $\Rightarrow$ 弯曲时空存在测地偏离效应 [相对引力效应] 由时空曲率 R_{abcd} 产生。
- ③ 平直时空存在 $R_{abcd} = 0$ 不存在引力场及其效应

8.3.3 伯克霍夫定理

Birkhoff's theorem.

① 真空, 无物质场 ② 静态 + 球对称 $\Rightarrow$ 施瓦西解

1923年 Birkhoff 证明定理: 真空爱因斯坦方程的球对称解必静态

应用: 非静态物质分布只要保持球对称分布, 外部时空几何仍由施瓦西真空解描述

$\Rightarrow$ 研究星体演化 (塌缩, 膨胀, 径向振荡或爆炸)

类比电动力学定理: 球对称电荷分布的电磁场 (即真空麦克斯韦方程的球对称解) 必为静电场

不存在球对称电磁波 $\neq$ 球面电磁波 (波前面为球面但无球对称性)

电磁辐射主要贡献来自于偶极辐射, 没有单极辐射

引力辐射主要贡献来自于四极辐射, 没有单极辐射和偶极辐射

$\Rightarrow$ 修改 Birkhoff 定理: 真空爱因斯坦方程的球对称解必施瓦西度规

延拓后的施瓦西度规在部分时空区域内并非静态. [类时 Killing 矢量场 (类) 变为类空]

1963年 Petrov 质疑 Birkhoff 定理

1988年 Kuang & Liang 球对称性弱化为共形球对称性

§ 8.4 莱斯纳-诺斯特朗解

Reissner-Nordstrom (RN) solution

8.4.1 电磁真空时空和爱因斯坦-麦克斯韦方程

除电磁场外没有物质场的时空称为电磁真空 (electrovacuum) 时空

无源电磁场 F_{ab} 的能动张量 $T_{ab} = \frac{1}{4\pi} (F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{2}g_{ab}F_{cd}F^{cd})$

电磁真空下爱因斯坦方程 $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} = 2(F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{2}g_{ab}F_{cd}F^{cd})$

F_{ab} 满足弯曲时空的无源麦克斯韦方程 $\nabla^a F_{ab} = 0$ $\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ ∇_a 同 g_{ab} 适配

$\Rightarrow$ Einstein-Maxwell 方程组

— 电磁真空时空由背景流形 M 、度规场 g_{ab} 和电磁场 F_{ab} 决定

• 电磁场 F_{ab} 按物理性质分为类光电磁场和非类光电磁场:

定义复张量场 $\Sigma_{ab} := F_{ab} + i^*F_{ab}$ $^*F_{ab}$ 是 F_{ab} 的对偶微分形式 $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} = 2(F_{ab}F^{ab} + i^*F_{ab}^*F^{ab})$

F_{ab} 为类光电磁场 (null electromagnetic field) 若 $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} = 0 \Leftrightarrow F_{ab}F^{ab} = 0, F_{ab}^*F^{ab} = 0$

F_{ab} 为非类光电磁场 (nonnull electromagnetic field) 若 $\Sigma_{ab}\Sigma^{ab} \neq 0$

P 系的瞬时观者 (p, z^a) 测得电场 $E_a := F_{ab}z^b$ 磁场 $B_a := ^*F_{ab}z^b$ — 观者依赖的

$\Rightarrow$ 构造不变量 $F_{ab}F^{ab} = 2(B^2 - E^2)$ $F_{ab}^*F^{ab} = 4\vec{E} \cdot \vec{B} = 4g^{ab}E_a B_a$

电磁场的类光条件 $F_{ab}F^{ab} = 0 \Leftrightarrow B^2 = E^2$ 瞬时观者测得的 $\vec{E}$ 和 $\vec{B}$ 长度相等, 彼此正交

$F_{ab}^*F^{ab} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ [闵氏时空的平面电磁波的基本特征]

类光电磁场是平直时空的平面电磁波在弯曲时空的推广.

8.4.2 Reissner-Nordstrom 解.

• 对于麦克斯韦方程组 $\nabla^a F_{ab} = 0$

$\nabla_{[a}F_{bc]} = 0$ 由外微分算符定义 $\Rightarrow dF = 0$ 即 $\exists A$ s.t. $F = dA$

$F = F_{[ab]} = F_{ab} = dA = (1+i)\nabla_{[a}A_{b]} = 2\partial_{[a}A_{b]}$

∇_a 可为任意数算符

静态球对称带电导体外部时空几何线元 $ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

待求 $(M, g_{ab}, F_{ab}(A_a))$.

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

静态球对称带电导体产生的电磁场 F_{ab} 是静态球对称的:

① 电磁势 A_a 在 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ 坐标下的分量 A_a 与坐标 t, θ, φ 无关

② 没有切于球面的分量 $A_2 = A_3 = 0$

A_a 有规范自由度: 设任意函数 $\chi = \chi(r)$ 则 $\tilde{A}_a = A_a + \nabla_a \chi$ 与 A_a 对应于相同 F_{ab}

$$\tilde{A}_1 = \tilde{A}_a \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a = A_a \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^a \nabla_a \chi(r) = A_1 + \frac{d\chi}{dr} \quad \text{选择 } \frac{d\chi}{dr} = -A_1 \quad \text{则 } \tilde{A}_1 = 0$$

$$\Rightarrow F_{ab} \text{ 化简至一个独立分量 } F_{10} = \partial_1 A_0 = \frac{dA_0}{dr} \quad (F_{01} = -F_{10})$$

$$\nabla_a F^{ab} = 0 \Rightarrow 0 = F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = F^{\mu\nu}{}_{,\mu} + \Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} \quad \text{缩并后得 } \Gamma^\mu{}_{\mu\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial g}{\partial x^\sigma} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial |g|}{\partial x^\sigma}$$

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} F^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu{}_{(\sigma\mu)} \frac{F^{\mu\sigma}}{=0} \Rightarrow \frac{d}{dr} (\sqrt{g} F^{10}) = 0 \quad \text{其中 } g = -e^{2(\alpha+\beta)} r^2 \sin^2\theta$$

$$\frac{d}{dr} (e^{\alpha+\beta} r^2 F^{10} \sin\theta) = \frac{d}{dr} (-e^{2(\alpha+\beta)} r^2 F_{10} \sin\theta) = 0 \quad F^{10} = F_{10} g^{10} = F_{10} e^{-2\beta} (e^{-2\alpha})$$

$$\text{电磁场方程 } \frac{d}{dr} (e^{2(\alpha+\beta)} r^2 F_{10}) = 0 \quad \text{通解为 } F_{10} = \frac{Q}{r^2} e^{-(\alpha+\beta)} \quad Q \text{ 为积分常数.}$$

$$\text{满足麦克斯韦方程的电磁场表达式 } F_{ab} = -\frac{Q}{r^2} e^{\alpha+\beta} (dt)_a \wedge (dr)_b$$

$$\cdot \text{ 对于爱因斯坦方程 } R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad \text{电磁场能量动量 } T_{ab} \text{ 的迹 } T \equiv g^{ab} T_{ab} = 0$$

$$\text{故能量守恒 } R=0 \Leftrightarrow R_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad F_{cd} F^{cd} = F_{01} F^{01} + F_{10} F^{10} = 2 F_{10}^2 g^{10} g^{00} \quad F_{0c} F_0{}^c = F_{01} F_{01} g^{11}$$

$$R_{00} = -e^{2(\alpha+\beta)} (-\alpha'' + \alpha'\beta' - \alpha'^2 - 2r^{-1}\alpha') \quad T_{00} = \frac{1}{4\pi} (F_{0c} F_0{}^c - g_{00} F_{cd} F^{cd}) = \frac{1}{8\pi} e^{-2\beta(r)} F_{10}^2$$

$$R_{11} = -\alpha'' + \alpha'\beta' - \alpha'^2 + 2r^{-1}\beta' \quad T_{11} = -\frac{1}{8\pi} e^{-2\alpha} F_{10}^2$$

$$R_{22} = -e^{2\beta} [1 + r(\alpha' - \beta')] + 1 \quad T_{22} = \frac{1}{8\pi} r^2 F_{10}^2 e^{-2(\alpha+\beta)}$$

$$R_{33} = -\{e^{2\beta} [1 + r(\alpha' - \beta')] - 1\} \sin^2\theta \quad T_{33} = \frac{1}{8\pi} r^2 F_{10}^2 e^{-2(\alpha+\beta)} \sin^2\theta$$

$$R_{00} = 8\pi T_{00} \quad \left. \begin{array}{l} R_{11} = 8\pi T_{11} \\ R_{22} = 8\pi T_{22} \\ R_{33} = 8\pi T_{33} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \alpha' = -\beta' \\ \text{通过重选 } t \text{ 而得 } \alpha = -\beta \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} R_{22} = 8\pi T_{22} \\ R_{33} = 8\pi T_{33} \end{array} \right\} \quad (re^{2\alpha})' = 1 - \frac{Q^2}{r^2} \quad C \text{ 为积分常数}$$

$$\text{解得 } e^{2\alpha} = 1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}, \quad e^{2\beta} = \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right)^{-1}$$

$$\text{RN 线元 } ds^2 = -\left(1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\text{电磁场 } F_{10} = \frac{Q}{r^2}$$

r 足够大 $\frac{Q^2}{r^2} \ll \frac{C}{r}$ 线元近似为 $ds^2 \approx -\left(1 + \frac{C}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

时空度规应与施瓦西度规近似一致 $C = -2M$.

星球可视为点电荷, 外部电场 F_0 为其电荷除以 r^2 — Q 为星球电荷

RN解: 度规 $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

电磁场 $F_{ab} = -\frac{Q}{r^2} (dt)_a \wedge (dr)_b$ $A_a = -\frac{Q}{r} (dt)_a$

描述质量为 M , 电荷为 Q 的静态球对称星体外部的时空几何

讨论电磁场 $F_{ab} F^{ab} = F_0 F^{01} + F_{10} F^{10} = 2 F_0 F_{10} g^{00} g^{11} = -2 \frac{Q^2}{r^4} \neq 0$ 为非类光电磁场

静态观者 G 测得 RN 解 F_{ab} 所得电场和磁场分别是静电场和零.

Pf: 静态观者 G 的个速 $z^a = f^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ 其中 $f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ [4速归一要求 $z^a z_a = -1$]

空间正交归-3标架 $(e^1)_a = f^{-1/2} (dr)_a$ $(e^2)_a = r (d\theta)_a$ $(e^3)_a = r \sin\theta (d\varphi)_a$

G 测得的电场 $E_a \equiv F_{ab} z^b = -\frac{Q}{r^2} (dt)_a \wedge (dr)_b \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b f^{-1/2} = -\frac{Q}{r^2} [(dt)_a (dr)_b - (dr)_a (dt)_b] \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b f^{-1/2}$

$E_a = \frac{Q}{r} f^{-1/2} (dr)_a = \frac{Q}{r} (e_1)^a$ 由点电荷激发的静电场

磁场 $B_a \equiv \star F_{ab} z^b = -\frac{1}{2} F^{cd} \varepsilon_{cdab} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b f^{-1/2}$ $(e_0)^b = f^{-1/2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b$

$= -\frac{1}{2} \frac{Q}{r^2} [(e_0)^c (e_1)^d - (e_1)^c (e_0)^d] \varepsilon_{cdab} (e_0)^b$ cd 反对称.

$= -\frac{Q}{r^2} (e_0)^b (e_0)^c (e_1)^d \varepsilon_{cdab} \Rightarrow -\varepsilon_{bca} = 0$

Birkhoff 定理推广: 爱因斯坦方程的电磁真空球对称解必为 RN 解

§8.5 轴对称度规简介 Axisymmetric metric 柱对称度规 Cylindrically symmetric metric

坐标系选为 $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \varphi, z\}$

轴对称时空存在具有闭合积分曲线的类空 Killing 矢量场 $\psi^a = (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ 稳态轴对称特例: Kerr 解

柱对称时空具有反映轴对称性的 Killing 矢量场 $\psi^a = (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ 和反映沿对称轴的平移不变性的

Killing 矢量场 $\eta^a = (\frac{\partial}{\partial z})^a$ 满足 $[\eta, \psi]^a = 0$ η^a 积分曲线同胚于 $\mathbb{R}$

§8.6 平面对称度规简介 Plane symmetric metric

Def 1 时空度规 g_{ab} 称为平面对称的 (plane symmetric), 若其等度规群 G_3 含有一个与 $E(2)$ 同构的子群 G_3

且 G_3 的所有轨道都是 2 维平面

$E(2)$ 对应的 Killing 矢量场有 3 个 $(\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a = -y(\frac{\partial}{\partial x})^a + x(\frac{\partial}{\partial y})^a$

1951 年 Taub 证明定理:

真空爱因斯坦方程的平面对称解 ① 静态度规, 其线元形式为 $ds^2 = \frac{1}{\sqrt{1+kz}}(-dt^2 + dz^2) + (1+kz)(dx^2 + dy^2)$

或 ② 空间均匀度规, 其线元形式 $ds^2 = \frac{-1}{\sqrt{1+kz}}(-dt^2 + dz^2) + (1+kz)(dx^2 + dy^2)$

3 个 Killing 矢量场可以给出第 4 个 Killing 矢量场 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$

① $(\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ 为类空 Killing 矢量场, $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 为类时 Killing 矢量场 $\Rightarrow$ 静态. T 为类时坐标

② $(\frac{\partial}{\partial x})^a, (\frac{\partial}{\partial y})^a, (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 为类空 Killing 矢量场 $\Rightarrow$ 时空是空间均匀的 (spatially homogeneous)

z 为类时坐标 $(\frac{\partial}{\partial z})^a$ 为类空 Killing 矢量场 在空间的 3 个方向 (T, X, Y) 上有平移不变性.

施瓦西度规中的参数 $M \Rightarrow$ 单参度规族

Taub 度规中的常数 k 可由坐标变换 $t = k^{1/3} T \quad z = k^{2/3} (1 + kz) \quad x = k^{1/3} X \quad y = k^{1/3} Y \quad (k \neq 0)$ 消去

$\Rightarrow$ 静态 $ds^2 = z^{-1/2}(-dt^2 + dz^2) + z(dx^2 + dy^2)$ 空间均匀 $ds^2 = -z^{-1/2}(-dt^2 + dz^2) + z(dx^2 + dy^2)$

考虑电磁真空爱因斯坦方程的平面对称解 (M, g_{ab}, F_{ab})

要求平面对称电磁场 $\mathcal{L}_{\xi_i} F_{ab} = 0$ ξ_i^a 为反映平面对称性的 3 个 Killing 矢量场

半平面对称 (semi-plane symmetric) 只有平移对称性 没有旋转对称性 $\mathcal{L}_{\xi_4} F_{ab} = 0$

§5.7 用标架计算曲率标量 §8.7 Newman-Penrose 形式

§8.8 用 NP 形式求解爱因斯坦-麦克斯韦方程举例

计算曲率: ① 坐标基底法 ② 正交归一标架法 (非坐标基底法) ③ 类光标架法
克氏符 联络 1-形式

§8.9 Vaidya 度规和 Kinnersley 度规

§8.10 坐标条件, 广义相对论的规范自由度

8.1 坐标条件 Coordinate conditions

真空爱因斯坦方程 $G_{ab}=0$ 选坐标下的分量方程 $G_{\mu\nu}(x)=0 \quad \mu, \nu=0, 1, 2, 3$

$G_{\mu\nu}(x) = R_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}R(x)g_{\mu\nu}(x) = 0$ 为关于标量函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 的偏微分方程组

$g_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$ 关于 μ, ν 对称 $\Rightarrow$ 10个代数独立的偏微分方程求解10个独立函数

曲率张量 R_{abcd} 满足比安基恒等式 $\nabla_{[a}R_{b]c]d^e} = 0 \Rightarrow \nabla^a G_{ab} = 0 \quad \nabla_a G^a_b = 0$

4个关于函数 $g_{\mu\nu}(x)$ 的微分恒等式 $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ 导致独立方程仅有6个

若函数组 $g_{\mu\nu}(x)$ 是方程组 $G_{\mu\nu}(x)=0$ 的解, 则坐标分量 $g_{\mu\nu}$ 与对偶坐标基矢 $(dx^\mu)_a$ 度规场 g_{ab}

$g_{ab} = g_{\mu\nu}(dx^\mu)_a (dx^\nu)_b$ 换坐标 $\{x^\mu\}$ 下的 $g'_{\rho\sigma}(x')$ 也是 $G'_{\rho\sigma}(x')=0$ 的解 一两组不同的解

边界条件+方程组能确定唯一的时空几何 g_{ab} , 但不能确定坐标系下的分量解 (相差一个坐标变换)

例如: 施瓦西解 $\{t, r, \theta, \varphi\}$ $g_{00}(r) = -(1 - \frac{2M}{r})$ $g_{rr}(r) = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ $g_{22}(r) = r^2$ $g_{33}(r, \theta) = r^2 \sin^2 \theta$

定义斜向同性坐标系 $\{t', r', \theta', \varphi'\}$ $t=t'$ $r=r'(1 + \frac{M}{2r'})^2$ $\theta=\theta'$ $\varphi=\varphi'$

$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ 满足相同边界条件(球对称)

$$= -\frac{(1 - \frac{M}{2r'})^2}{(1 + \frac{M}{2r'})^4} dt'^2 + (1 + \frac{M}{2r'})^4 [dr'^2 + r'^2(d\theta'^2 + \sin^2\theta' d\varphi'^2)]$$

[广义协变性为方程组提供了4个自由度] $\Rightarrow$ 附加方程(坐标条件)以指定具体坐标

1° 高斯法坐标条件 $g_{00} = -1$ $g_{0i} = 0$ ($i=1, 2, 3$) 时轴正交.

2° 谐和坐标条件 $g^{ab}\nabla_a\nabla_b x^\sigma = 0$ ($\sigma=0, 1, 2, 3$) $\Leftrightarrow g^{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$

满足 $g^{ab}\nabla_a\nabla_b f = 0$ 的函数 f 称为调和函数 (harmonic function)

— 挑选特殊坐标系以消除由爱因斯坦广义协变性导致的 $g_{\mu\nu}(x)$ 不确定性.

· 有源爱因斯坦方程 $G_{\mu\nu}(x) = 8\pi T_{\mu\nu}(x)$ [比安基恒等式 $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ 不足以使独立方程减少]

例如: 4速场为 U^a , 固有密度场为 ρ 的尘埃, 能动张量 $T_{ab} = \rho U_a U_b = \rho g_{ac} U^c g_{bd} U^d$

爱因斯坦方程 $G_{ab} = 8\pi \rho g_{ac} U^c g_{bd} U^d$ 分量形式 $G_{\mu\nu} = 8\pi \rho g_{\mu\alpha} U^\alpha g_{\nu\beta} U^\beta \quad \mu, \nu=0, 1, 2, 3$

标量函数 $g_{\mu\nu}, U^\mu, \rho$ 共有15个 $\Rightarrow$ 独立方程 爱因斯坦方程(10) + 4速场归一条件 $g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = -1$ (1) + 坐标条件(4) 共有15个

8.10.2 广义相对论的规范自由性 Gauge freedom of GR.

主动语言-几何描述 讨论张量方程 $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ 以真空场方程 $G_{ab} = 0$ 为例

Claim 设 $\phi: M \rightarrow M$ 是微分同胚, $R_{ab}[g]$ 是度规 g_{ab} 的里奇张量, 则 $\phi_*(R_{ab}[g]) = R_{ab}[\phi_*g]$

$$\phi_* G_{ab}[g] = G_{ab}[\phi_*g] \quad \text{即} \quad G_{ab}[g] = 0 \iff G_{ab}[\phi_*g] = 0$$

g_{ab} 是 $G_{ab} = 0$ 的解当且仅当 $\phi_* g_{ab}$ 也是解, 但 $\phi_* g_{ab} \neq g_{ab}$ $\tilde{g}_{ab} = \phi_* g_{ab}$

[边界条件只能把爱因斯坦方程的解 g_{ab} 确定到相差一个微分同胚的程度, 两者描述相同的局域时空几何]

被动语言: 诱导出一个坐标变换.

对于流形 M 和 $\tilde{M}$ 存在微分同胚映射 $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ 则两者像得不能再像

对于时空 (M, g_{ab}) 和 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 存在微分同胚映射 $\phi: M \rightarrow \tilde{M}$ 且 $\phi_* g_{ab} = \tilde{g}_{ab}$ 则两者像得不能再像

(M, g_{ab}) 能描述的现象都可用 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 等价描述:

$\forall p \in M$ 有 $u^a, v^b \in V_p$ 对应 $\phi(p) \in \tilde{M}$ 有 $\phi_* u^a, \phi_* v^b \in V_{\phi(p)}$

$$\text{内积相等} \quad g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi^* \tilde{g}_{ab})|_p u^a v^b = \tilde{g}_{ab}|_{\phi(p)} (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b$$

$$\text{张量积相等} \quad (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b = \phi_* (u^a v^b) \quad \dots$$

(M, g_{ab}) 与 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 在几何上等价

考虑 $\tilde{M} = M$ 有两个度规 $g_{ab}, \tilde{g}_{ab} = \phi_* g_{ab}$ (ϕ 为微分同胚)

若 (M, g_{ab}) 与 $(M, \tilde{g}_{ab})$ 等价 则 $g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi_* g_{ab})|_{\phi(p)} (\phi_* u)^a (\phi_* v)^b$

$$\text{而非} \quad g_{ab}|_p u^a v^b = (\phi_* g_{ab})|_p u^a v^b$$

同几何的性质 — “易地昌戏” 度规 g_{ab} 描述 p 点的几何, $\tilde{g}_{ab}$ 描述 $\phi(p)$ 点的几何 $\Rightarrow$ 两者等价
给定度规场 g_{ab} 即确定一种几何 / 给定几何确定度规场的一个等价类 $\{g_{ab}\}$. [几何的定义].

等价类中的度规场相差一个微分同胚

$g_{ab} \mapsto \phi_* g_{ab}$ 不改变几何这一性质称为广义相对论的规范自由性 (gauge freedom)

$\tilde{g}_{ab} = \phi_* g_{ab}$ 称为规范变换 (gauge transformation) [不改变物理实体的变换]

相应的不变性(自由性)称为规范不变性(自由性)

① 类比电动力学 - 4 势 A_a 的规则不改变电磁场 F_{ab}

② 拓展线性引力的规范变换 [广义相对论中规范变换的无穷小形式]: $g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab}$

规范变换 $\gamma_{ab} \mapsto \tilde{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ ξ^a 是无穷小矢量场

度规差异 $\tilde{g}_{ab} - g_{ab} = \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ 引入矢量场 λ^a 和实数 t 使 $\xi^a = t \lambda^a$ (t 为 - 标量)

$$= t(\partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a) \equiv t \mathcal{L}_\lambda \eta_{ab} \quad \partial_c \eta_{ab} = 0$$

李导数公式 $\mathcal{L}_\lambda \eta_{ab} = \lambda^c \partial_c \eta_{ab} + \eta_{cb} \partial_a \lambda^c + \eta_{ac} \partial_b \lambda^c = \partial_a \lambda_b + \partial_b \lambda_a$

$$\mathcal{L}_\lambda \eta_{ab} = \mathcal{L}_\lambda (g_{ab} - \gamma_{ab}) \equiv \mathcal{L}_\lambda g_{ab} \text{ (第一项为 - 标量)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\phi_t^* g_{ab} - g_{ab})$$

$$\text{故 } \tilde{g}_{ab} - g_{ab} \approx t \mathcal{L}_\lambda g_{ab} \stackrel{?}{=} \phi_t^* g_{ab} - g_{ab} \Rightarrow \tilde{g}_{ab} \approx \phi_t^* g_{ab}$$

线性引力规范变换后的新度规 $\tilde{g}_{ab}$ 与原始度规 g_{ab} 在一级近似下相差到一个微分同胚

$\Rightarrow$ 结论: 设物理理论由流形 M 及其上的若干个张量场 $T^{(i)}$ 描述

则 $(M, T^{(i)})$ 与 $(M, \tilde{T}^{(i)})$ 描述相同物理当且仅当存在微分同胚 $\phi: M \rightarrow M$ 使 $\tilde{T}^{(i)} = \phi_* T^{(i)}$

第九章 施瓦西时空

Chapter 9. Schwarzschild Spacetime

§9.1 施瓦西时空的测地线 Geodesics in the Schwarzschild spacetime

$\gamma(\tau)$ 为类时(光)测地线 (类时) τ 为固有时 (类光) τ 为仿射参数

$$U^\mu \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\tau) \text{ 参数表达式 } X^\mu(\tau) \\ \text{测地线分量方程:} \\ U^\mu = \left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \left(\frac{dt}{d\tau}\right) \frac{dt}{d\tau} + \left(\frac{dr}{d\tau}\right) \frac{dr}{d\tau} + \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right) \frac{d\theta}{d\tau} + \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right) \frac{d\phi}{d\tau} \\ \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad \mu=0,1,2,3 \end{array} \right.$$

并解 $t(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau)$ 标函数及其导数耦合

利用 Killing 矢量场简化求解

1° 利用施瓦西时空的球对称性简化测地线的坐标表示

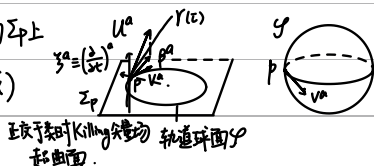
$\gamma(\tau)$ 在赤道面上.

Claim 9-1-1 设 $\gamma(\tau)$ 是施瓦西时空的一条类时或类光测地线, 则总可选择施瓦西坐标使 $\gamma(\tau)$ 的 $\theta = \frac{\pi}{2}$

Pf: $\forall p \in \gamma(\tau)$ 过 p 点的轨道球面 $\mathcal{S}$ 过 p 点的等位面 Σ_p

测地线 $\gamma(\tau)$ 与 Σ_p 不总是正交 (保持正交即为静态观者世界线)

故 p 点的切速 U^μ 在 Σ_p 上的投影 β^μ 非 0



正交于 Killing 矢量场 轨道球面 $\mathcal{S}$ 的切面.

① 若 p 点的 β^μ 有切于 $\mathcal{S}$ 的向量 U^μ , 则 (p, U^μ) 决定 $\mathcal{S}$ 上的唯一测地线 - 大圆.

以此大圆为赤道定义 $\mathcal{S}$ 上的坐标 θ, ϕ $\theta(p) = \frac{\pi}{2} \quad \frac{d\theta}{d\tau}|_p = 0$

② 若 p 点的 β^μ 没有切于 $\mathcal{S}$ 的向量 U^μ ($r(\tau)$ 为径向测地线), 则选 $\mathcal{S}$ 上任一过 p 点的大圆为赤道

⇒ 由于施瓦西线元 ds^2 在变换 $\theta \rightarrow \pi - \theta$ 下的不变性保证南北半球关于赤道的对称性

则利用携带法将 $\mathcal{S}$ 上的 θ, ϕ 坐标推广所得的施瓦西坐标系 $\{t, r, \theta, \phi\}$ 使满足

1° 整条 $\gamma(\tau)$ 上 $\theta(p) = \frac{\pi}{2}$ 2° $\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^\mu|_p$ 在坐标基矢 $\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^\mu|_p$ 的分量 $\frac{d\theta}{d\tau}|_p = 0$

定量证明: $\mu=2 \quad \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0$ 关于 $\theta(\tau)$ 的 2 阶常微分方程

满足初始条件 $\theta(p) = \frac{\pi}{2}, \frac{d\theta}{d\tau}|_p = 0$ 的唯一解即是 $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$.

定义 $\kappa := -g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^b = \begin{cases} 1 & \text{对类时测地线} \\ 0 & \text{对类光测地线} \end{cases}$

$-\kappa = g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)^b = g_{00} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + g_{11} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + g_{33} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2$

$-\kappa = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 \quad \sin \theta = 1$

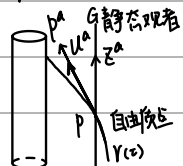
施瓦西时空中的两个Killing矢量场 $(\frac{\partial}{\partial t})^a, (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$ + 测地线切矢 $U^a \equiv (\frac{\partial}{\partial \tau})^a \Rightarrow U^a \xi_a$ 在测地线上为常数

定义测地线 $\gamma(\tau)$ 上的两个常量 $E := -g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial \tau})^b = -g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} = (1 - \frac{2M}{r}) \frac{dt}{d\tau}$

$$L := g_{ab} (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a (\frac{\partial}{\partial \tau})^b = g_{\phi\phi} \frac{d\varphi}{d\tau} = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$$

$$-K = -(1 - \frac{2M}{r})^{-1} E^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} (\frac{d\varphi}{d\tau})^2 + \frac{1}{r^2} \quad r(\tau) \text{ 的1阶常微分方程} \Rightarrow \text{求解 } r(\tau), t(\tau), \varphi(\tau).$$

讨论沿测地线守恒的物理量 E, L . $U^a \equiv (\frac{\partial}{\partial \tau})^a \quad \xi^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$



G 静态观者. 观者 G 对自由质点做当时当地测量 (local measurement) 得到的能量值

$$E_{\text{local}} = -\xi_a P^a = -g_{ab} \xi^a P^b \quad \text{4动量 } P^a \equiv m U^a \quad \text{4速 } \xi^a = \gamma^{-1} (\frac{\partial}{\partial \tau})^a$$

$$\text{4速归一} \quad \xi^a \xi_a = -1 = g_{ab} \xi^a \xi^b = \gamma^{-2} g_{ab} (\frac{\partial}{\partial \tau})^a (\frac{\partial}{\partial \tau})^b = \gamma^{-2} \xi^b \xi_b$$

$$\text{可得 } \gamma = (-\xi^b \xi_b)^{-1/2} \quad E := -\xi^a U_a = g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial \tau})^b = -g_{ab} \gamma \xi^a \frac{1}{m} P^b = \frac{\gamma}{m} E_{\text{local}}$$

$$\text{无穷远处 } r \rightarrow \infty \quad g_{00} \approx -1 \quad \xi^a \xi_a = \gamma^{-2} g_{00} = -1 \Rightarrow \gamma|_{\infty} = (-\xi^b \xi_b)^{-1/2}|_{\infty} \equiv 1$$

$$E \rightarrow \frac{1}{m} E_{\text{local}}$$

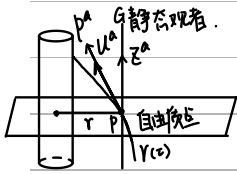
一常量 E 解释为无限远的静态观者对该点做当时当地测量所得的单位质量的能量

在自由质点运动过程中守恒的是 E 而非 E_{local}

引力场的能量是不定域化的

$\left\{ \begin{array}{l} E \text{ 为自由质点单位质量的总能量 (包括引力势能)} \quad \text{运动过程中引力对自由质点做功} \\ E_{\text{local}} \text{ 为静态观者做当时当地测量所得的能量 (不包括引力势能)} \end{array} \right.$

类光测地线 $\gamma(\tau)$: E 解释为光子总能量 $\times h^{-1}$



$$L := g_{ab} (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a (\frac{\partial}{\partial \tau})^b = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} \quad U^a \text{ 为自由质点 } \gamma(\tau) \text{ 在 } P \text{ 上的4速, 其3速为 } U^a$$

U^a 为自由质点 $\gamma(\tau)$ 在 P 上的4速, 其3速为 U^a

P 上的坐标基矢归一化 $\Rightarrow P$ 点切空间 V_P 的一个正交归一基:

$$(e_0)^a \equiv (1 - \frac{2M}{r})^{-1/2} (\frac{\partial}{\partial t})^a = \xi^a \quad (e_1)^a \equiv (1 - \frac{2M}{r})^{1/2} (\frac{\partial}{\partial r})^a$$

$$(e_2)^a \equiv \frac{1}{r} (\frac{\partial}{\partial \theta})^a \quad (e_3)^a \equiv \frac{1}{r} (\frac{\partial}{\partial \varphi})^a$$

$$\text{对偶标架 } (e^0)_a = (1 - \frac{2M}{r})^{1/2} (dt)_a \quad (e^1)_a = (1 - \frac{2M}{r})^{-1/2} (dr)_a \quad (e^2)_a = r (d\theta)_a \quad (e^3)_a = r (d\varphi)_a$$

$$\text{欧氏空间质点角动量 } \vec{j} := \vec{r} \times \vec{p} \Rightarrow \text{弯曲时空中自由质点角动量 } j^a := \varepsilon^a_{bc} r^b p^c = \varepsilon^a_{bc} m \gamma r^b U^c$$

$$\text{其中方位 } r^b = r (e_1)^b \quad \text{3动量 } p^a = \gamma m U^a, \quad \gamma := -U^a \xi_a$$

由于测地线坐标表达式中 $\theta(r) = \frac{\pi}{2}$, 故 U^0 的分量为 0

由于 $(e_1)^b$ 沿径向运动和对称性性质, 故 U^a 的任何 r 分量对 j^a 无贡献

$$\Rightarrow j^a = \mathcal{E}^a_{bc} r(e_1)^b m \gamma U^c (e_3)^f$$

$$j_a = \mathcal{E}_{a13} r \gamma m U^3 = \mathcal{E}_{213} r \gamma m U^3 (e^2)_a = -r \gamma m U^3 (e^2)_a$$

$$|j| = |r \gamma m U^3| = |r \gamma m U^a (e^3)_a| \quad U^a = \gamma (Z^a + U^a) \quad \text{正交性} \quad Z^a (e^3)_a = (e_0)^a (e^3)_a = 0$$

$$= |m r (U^a - \gamma Z^a) (e^3)_a| = |m r [U^a \cdot r (d\varphi)_a]| = |m r^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a (d\varphi)_a| = m |r^2 \frac{d\varphi}{dt}| = m |L|$$

- 量 L 的绝对值是单位质量自由点相对于静态参考系的角动量的大小

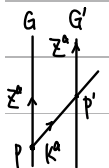
类光测地线 $\gamma(r)$: L 解释为光子角动量 $\times \hbar^{-1}$

§9.2 广义相对论的经典实验验证 Experimental Tests of GR.

9.2.1 引力红移 Gravitational Redshift.

· 静态时空的引力红移

几何光学近似下光信号沿类光测地线传播。两静态观者 G, G' G 在 P 时发出光子在 P' 时到达 G'



个波长为 λ^a 的光相对于个速为 Z^a 的观者的角频率为 $\omega = -K_a Z^a$

$\omega = -(Z^a K_a)|_P \quad \omega' = -(Z^a K_a)|_{P'} \quad \xi^a = \gamma Z^a \quad \text{其中 } \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

由 claim 4-3-3 $K_a \xi^a$ 在光子世界线(测地线)上为常数 $(K_a \xi^a)|_P = (K_a \xi^a)|_{P'}$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{(Z^a K_a)|_{P'}}{(Z^a K_a)|_P} = \frac{(\gamma^{-1} \xi^a K_a)|_{P'}}{(\gamma^{-1} \xi^a K_a)|_P} = \frac{\gamma'}{\gamma} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{\gamma'}{\gamma} \quad \text{或} \quad \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\gamma}{\gamma'}$$

· 施瓦西时空中量计算引力红移 $\gamma = (1 - \frac{2M}{r})^{1/2} \quad \gamma' = (1 - \frac{2M}{r'})^{1/2}$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\gamma'}{\gamma} \text{ 或 } \left(\frac{1 - \frac{2M}{r'}}{1 - \frac{2M}{r}} \right)^{1/2} \quad r' > r \quad \text{恒星附近的光发射至接收者 } \lambda' > \lambda \quad \text{波长更长产生红移}$$

纯粹由于引力场(时空弯曲)的红移现象称为引力红移 (gravitational redshift)

$\gamma = (1 - \frac{2M}{r})^{1/2}$ 称为红移因子.

相对红移量 $z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$

观测验证: ① 太阳所发出的光相对红移量约为 2×10^{-6}

② 白矮星光线的红移: 1960年 Pound, Rebka 高精度引力红移实验

穆斯堡尔效应 (Mössbauer effect) 特定晶体对特殊频率的 γ 射线做选择性高的共振吸收

多普勒效应蓝移与引力红移抵消

9.2.2 水星近日点进动 Perihelion Precession of Mercury

牛顿力学 — 行星的轨道是以太阳为一个焦点的椭圆

观测结果 — 水星轨道不闭合, 相邻周期的近日点存在微小改变

累积效应后有圆的长轴绕太阳有缓慢转动

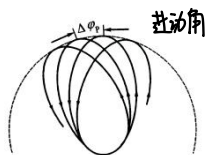
— 近日点进动 (precession)

水星近日点的进动率约为每世纪 $5600''$ 可解释 $555''$ 无法解释 $43''$ [广义相对论效应]

模型: 水星是在由太阳造成的弯曲时空中的自由质点, 忽略其自身引力作用

方法: 对施瓦西时空的类时测地线的近似计算

结论: 水星的轨道不是闭合曲线, 其近日点进动率为每世纪 $43''$.



计算: 令太阳和水星的质量分别为 M 和 m

圆轨道引力论 水星引力势能 $U(r) = -\frac{Mm}{r}$ 轨道保持在赤道面上 $U_\theta = 0$

机械能守恒 $A = \frac{1}{2} m u^2 + U(r) = \frac{1}{2} m (u_r^2 + u_\varphi^2) - \frac{Mm}{r}$ $u_r = \frac{dr}{dt}$ $u_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}$. 待求 $r(t), \varphi(t)$.

$\Rightarrow$ 变量 $r = r(\varphi)$ 单位质量角动量 $L = r u_\varphi = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$.

两边同乘 $(\frac{dt}{d\varphi})^2 \frac{1}{m} = \frac{r^4}{m L^2}$ 有 $\frac{A}{m L^2} r^4 = \frac{1}{2} [(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2] - \frac{M}{L^2} r^3$.

应求解方程 $(\frac{dr}{d\varphi})^2 + r^2 - \frac{2M}{L^2} r^3 - \frac{2A}{m L^2} r^4 = 0$ 令 $\mu = r^{-1}$ ($\mu \neq 0$) 且同乘 μ^4

$$(\frac{d\mu}{d\varphi})^2 + \mu^2 - \frac{2M}{L^2} \mu - \frac{2A}{m L^2} = 0$$

两边对 φ 求导 $\frac{d\mu}{d\varphi} (\frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \mu - \frac{M}{L^2}) = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mu}{d\varphi} = 0 \\ \frac{d^2\mu}{d\varphi^2} + \mu = \frac{M}{L^2} \end{array} \right.$ 圆轨道 $r = \text{const}$

e, φ_0 为积分常数

方程解 $\mu(\varphi) = \frac{M}{L^2} [1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)]$ 不失一般性 $\varphi_0 = 0$ $e^2 = 1 + \frac{2AL^2}{mM}$

偏心率 e 的圆锥截线方程 $\mu(\varphi) = \frac{M}{L^2} (1 + e \cos \varphi)$ $0 \leq e < 1$ 轨道为椭圆

广义相对论

$-U = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$ 对于类时测地线 $K=1$ $L = r^2 \frac{d\varphi}{d\tau}$

两边求导 $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{r^4}{L^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ 解 $r = r(\varphi)$ $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{E^2 r^4}{L^2} + r^2 \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0$ 对于太阳 $\frac{GM}{c^2} \approx 1.5 \text{ km}$

令 $M = r^{-1}$ 并对 φ 求导 $\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = \frac{M}{L^2} + 3M\mu^2$ 广义相对论修正项 $3M\mu^2 = \frac{3M}{r} \mu^2 = \left(\frac{GM}{c^2}\right) \frac{1}{r} \mu^2 \ll \mu$

零级近似解 $\mu_0(\varphi) = \frac{M}{L^2} (1 + e \cos \varphi)$ $\frac{M}{L^2} \sim \mu$

代入方程右侧第二项可得一级近似解 $\mu_1(\varphi)$ 的方程 $\frac{d^2 \mu_1}{d\varphi^2} + \mu_1 = \frac{M}{L^2} + 3M\mu_0^2 = \frac{M}{L^2} + \frac{3M^3}{L^4} (1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi)$

一级近似解 $\mu_1(\varphi) = \frac{M}{L^2} (1 + e \cos \varphi) + \frac{3M^3}{L^4} \left[1 + e \varphi \sin \varphi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\varphi \right) \right]$

使水星偏离闭合轨道，出现近日点进动。

当只知初值条件时 $\mu_1(\varphi) \approx \frac{M}{L^2} \left[1 + e (\cos \varphi + \frac{3M^2}{L^2} \varphi \sin \varphi) \right]$ $\frac{M^2}{L^2} \approx \mu M = \frac{1}{r} \left(\frac{GM}{c^2} \right) \ll 1$

令 $\varepsilon = \frac{3M^2}{L^2}$ $\cos \varepsilon \varphi \approx 1$ $\sin \varepsilon \varphi \approx \varepsilon \varphi$ $\cos \varphi + \varepsilon \varphi \sin \varphi \approx (\cos \varepsilon \varphi) \cos \varphi + (\sin \varepsilon \varphi) \sin \varphi = \cos(\varphi - \varepsilon \varphi)$

则 $\frac{1}{r(\varphi)} \approx \mu_1(\varphi) \approx \frac{M}{L^2} (1 + e \cos(\varphi - \varepsilon \varphi))$ 近日点 r 最小 μ 最大 $\cos(\varphi - \varepsilon \varphi) = 0$

近日点 $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{2\pi}{1-\varepsilon} \approx 2\pi(1+\varepsilon) = 2\pi + 2\pi\varepsilon$

水星近日点在每周期内的进动角 $\Delta\varphi_p \approx 2\pi\varepsilon = \frac{6\pi M^2}{L^2} \Rightarrow$ 进动率 $43''/\text{世纪}$

1.2.3 星光偏折 Deflection of Light

远方恒星射到地面的光线经过太阳附近受太阳引力场影响而弯曲。

$-U = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2}$ 对于类光测地线 $K=0$

两边求导 $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = \frac{r^4}{L^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ 解 $r = r(\varphi)$ $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - \frac{E^2 r^4}{L^2} + r^2 \left(1 - \frac{r^2}{L^2}\right) = 0$

令 $M = r^{-1}$ 并对 φ 求导 $\frac{d^2 \mu}{d\varphi^2} + \mu = 3M\mu^2$

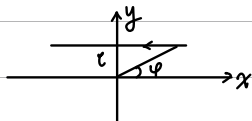
$r^2 M = 0$ 平直时空 方程通解为 $\mu(\varphi) = \frac{1}{L} \sin(\varphi + \alpha)$ L, α 为积分常数

设 $\varphi=0$ 时光在无限远 $M(0)=\frac{1}{r(0)}=0$ 则 $\alpha=0$ $M(\varphi)=\frac{1}{l}\sin\varphi$

令 $x=r\cos\varphi$ $y=r\sin\varphi=\frac{1}{\mu}\sin\varphi=l=\text{常数}$

$r \in (0, \infty)$ $\varphi \in (0, \pi) \rightarrow x \in (-\infty, +\infty)$

光的空间轨迹是一条直线



2° $M \neq 0$ 零级近似解 $M_0(\varphi) = \frac{1}{l}\sin\varphi$

代入方程右侧可得一级近似解 $M_1(\varphi)$ 的方程 $\frac{d^2 M_1}{d\varphi^2} + M_1(\varphi) = 3M_0^2 = \frac{3M}{l^2}\sin^2\varphi$

一级近似解 $M_1(\varphi) = \frac{1}{l}\sin\varphi + \frac{M}{l^2}(1 - \cos\varphi)^2$

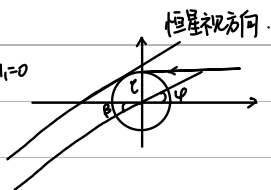
$\varphi=0$ 时 $M_1=0$ $r=\infty$ 离太阳无穷远

$\varphi=\pi$ 时 $M_1=\frac{4M}{l^2}$ 光子沿 $\pi+\beta$ 的方向远离太阳 $r=\infty$ $M_1=0$

$\varphi=\pi+\beta$ $M_1 = \frac{1}{l}\sin(\pi+\beta) + \frac{M}{l^2}[1 - \cos(\pi+\beta)]^2$

$$= -\frac{1}{l}\sin\beta + \frac{M}{l^2}(1 + \cos\beta)^2$$

$0 \approx -\frac{1}{l}\beta + \frac{4M}{l^2} \Rightarrow \text{偏折角 } \beta \approx \frac{4M}{l} \text{ 随 } l \text{ 的减小而增大.}$



l 最小值为太阳半径 $\beta \approx \frac{4GM}{c^2} = 1.75''$ 最大星光偏折角.

观测验证: 比较星光被太阳偏折时恒星视位置与地球转至太阳另一侧恒星真实位置.

视位置一日全食 理论预期值的 1.13 ± 0.07 倍和 0.92 ± 0.17 倍

不完全支持广义相对论: 牛顿引力论预言星光被太阳偏折, 偏折角约为 $\frac{1}{2}$ GR 预言值.
 [1.0-1.3]

§9.3 球对称恒星及其演化

Evolution of a spherical star

9.3.1 静态球对称恒星内部解

Interior solutions of a static, spherical star

静态+球对称 $\Rightarrow$ 施瓦西坐标系下度规 $ds^2 = -e^{2A(r)} dt^2 + e^{2B(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$.

星体内部物质切视作理想流体 能动张量 $T_{ab} = (p+\rho)U_a U_b + p g_{ab}$

静态星体 $\Rightarrow$ 随动观者可看作静态观者 4速 U^a 平行于 $\xi^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$

由4速归一 $U^a U_a = -1$ $\xi^a \xi_a = g_{00} = -e^{2A}$ 故 $U^a = e^{-A} (\frac{\partial}{\partial t})^a$ $U_a = -e^A (dt)_a$

T_{ab} 非零坐标分量 $T_{00} = T_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial t})^b = (p+\rho) e^{2A} (-1)(-1) + p(-e^{2A}) = \rho e^{2A}$

$$T_{11} = p e^{2B} \quad T_{22} = p r^2 \quad T_{33} = p r^2 \sin^2\theta$$

$G_{ab} = 8\pi T_{ab} \Rightarrow R^a{}_\nu - \frac{1}{2} R \delta^a{}_\nu = 8\pi T^a{}_\nu$ 中有3个独立方程:

$$① \quad 8\pi \rho = e^{-2B} (2B' r^{-1} - r^{-2}) + r^{-2} \xrightarrow{\times r^2} \frac{d}{dr} (r e^{-2B}) = 1 - 8\pi \rho r^2$$

$$② \quad 8\pi p = e^{-2B} (2A' r^{-1} + r^{-2}) - r^{-2}$$

$$③ \quad 8\pi p = e^{-2B} [A'' - A'B' + A'^2 + (A'-B')r^{-1}]$$

$$① \text{ 积分得 } r e^{-2B(r)} = r - 2m(r) + C \quad \text{其中 } m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(x) x^2 dx, \quad C \text{ 为积分常数}$$

若 $C \neq 0$ $r \rightarrow 0$ 时 $g'' = e^{-2B} \rightarrow \infty$ 在星体中不合理 故 $C=0$ $g_{11}(r) = e^{2B(r)} = [1 - \frac{2m(r)}{r}]^{-1}$

设星体半径为 R $r > R$ 应为施瓦西真空解 + 内外度规在星体表面 $r=R$ 连续

$$\text{可得 } g_{11}(R) = [1 - \frac{2m(R)}{R}]^{-1} = (1 - \frac{2M}{R})^{-1} \quad M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr$$

Note: 空间 Σ_t 中3维固有体积元 $\mathcal{E} = \sqrt{h} dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = [1 - \frac{2m(r)}{r}]^{-1/2} r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi$

$$\int \rho(r) \mathcal{E} = \int \rho(r) [1 - \frac{2m(r)}{r}]^{-1/2} r^2 \sin\theta dr \wedge d\theta \wedge d\varphi = 4\pi \int_0^R \rho(r) [1 - \frac{2m(r)}{r}]^{-1/2} r^2 dr \neq M.$$

$\rho(r)$ 是星内静态观者做当时当地所得的能量密度, 不含引力场贡献 [引力场能的非负定性].

M 是施瓦西时空的总质量 (总能量), 包含引力势能 [渐近平直时空可以定义总能量].

$$② \quad \frac{dA}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi p r^3}{r[r - 2m(r)]}$$

$$m(r) \ll r$$

牛顿近似 $\rho \ll p$ 使 $Pr^3 \ll p r^3 \sim m(r)$ $\Rightarrow$ 静态参考系三维空间近似为欧氏空间 $1 \cong g_{11} = (1 - \frac{2m(r)}{r})^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dr} \cong \frac{m(r)}{r^2} = \frac{d\phi}{dr} \quad \phi \text{ 为球对称情况下的牛顿引力势, } \frac{m(r)}{r^2} \text{ 为引力场强}$$

A 是牛顿引力势在静态球对称弯曲时空中的对应量。

$$\textcircled{2} \quad \frac{dp}{dr} = -(p+p) \frac{dA}{dr} = -(p+p) \frac{m(r) + 4\pi p r^3}{r[r - 2m(r)]} \quad \text{OV 流体静力学平衡方程 (Oppenheimer - Volkoff equation)}$$

牛顿近似 $\frac{dp}{dr} \cong -p \frac{m(r)}{r^2}$ 牛顿力学中的流体静力学平衡方程。—— 压强梯度与引力作用平衡

$$\text{由以上讨论 时空度规 } ds^2 = -e^{2A(r)} dt^2 + \left[1 - \frac{2m(r)}{r}\right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

$$\text{星体物质 } T_{ab} = [p(r) + p(r)] e^{2A(r)} (dt)_a (dt)_b + p g_{ab}$$

待求函数为 $A(r), m(r), p(r), \rho(r)$

$$\text{满足方程为 } \frac{dm(r)}{dr} = 4\pi \rho(r) r^2$$

$$\left[\frac{dA}{dr} \cong \frac{m(r)}{r^2}\right] \quad \frac{dA(r)}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi p r^3}{r[r - 2m(r)]}$$

$$\left[\frac{dp}{dr} \cong -p \frac{m(r)}{r^2}\right] \quad \frac{dp(r)}{dr} = -(p+p) \frac{m(r) + 4\pi p r^3}{r[r - 2m(r)]} \quad + \text{物态方程 (equation of state)} \quad f(p, \rho) = 0$$

初始条件 $r=0 \quad m(0)=0, A(0), p_0 \equiv p(0)$ 指定后对 3 个微分方程从 $r=0$ 积分至 $p=0$ (星球表面 $r=R$)

保证星球表面与球外真空解的联结条件满足 $e^{2A(r)} = 1 - \frac{2M}{R} \Rightarrow p_0$ 决定 $A(r), m(r), p(r)$ 。

理想化的物态方程 $p = \text{const}$ —— 压强不太大的中子星的一级近似: $m(r) = \frac{4}{3}\pi \rho r^3$

$$\text{— 牛顿引力论下 } \frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi \rho^2 r \quad \text{积分可得 } p(r) = -\frac{2}{3}\pi \rho^2 r^2 + p_0$$

$$\text{恒星半径 } R \quad 0 = p(R) = -\frac{2}{3}\pi \rho^2 R^2 + p_0 \quad p_0 = \frac{2}{3}\pi \rho^2 R^2 \quad p(r) = \frac{2}{3}\pi \rho^2 (R^2 - r^2)$$

— 广义相对论下求解 OV 方程

$$\text{施瓦西内解 } p(r) = p \frac{y - \beta(r)}{p(r) - \beta y} \quad \text{其中 } y = (1 - \frac{2M}{R})^{1/2} \quad \beta(r) = (1 - \frac{2m(r)}{R^3})^{1/2}$$

$$\text{中心压强 } p_0 = p(0) = p \frac{y-1}{1-\beta y} \quad \frac{M}{R} \uparrow \Rightarrow y \downarrow \Rightarrow p_0 \uparrow \quad \left(\frac{dp_0}{dy} < 0\right)$$

下限 $y = \frac{1}{3} \quad p_0 \rightarrow \infty$

R 一定 M 越大引力越强 平衡的压强梯度越大

$\Rightarrow p_0$ 越大。

中心压强无论多大也无法维持平衡 M 一定 R 越小产生更大的压强梯度越大

静态均匀密度是 $\frac{M}{R}$ 的上限 $\left(\frac{M}{R}\right)_{\max} = \frac{4}{9}$

$$\text{太阳 } \frac{GM_0}{c^2} \cong 1.5 \text{ km} \quad R_0 \cong 7 \times 10^5 \text{ km} \quad \frac{GM_0/c^2}{R_0} \cong 2 \times 10^{-6} \ll \frac{4}{9}$$

密度为 ρ 的均匀密度星的最大允许质量 $M_{\max} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{3\pi\rho}}$

$\Rightarrow$ 只要 $\rho(r) \geq 0$ 及 $\frac{d\rho}{dr} \leq 0$, 广义相对论要求任何半径为 R 的球对称静态星的质量有上限 $\frac{4}{3}R$.

9.3.2 恒星演化 Star evolution

前身: 一团密度不均的气体 (主要是氢)

密度较大处有较强引力以吸引更多气体, 形成球对称气团

任一薄球层内的任一体元所受到来自气团的引力指向球心 $\Rightarrow$ 气团在引力作用下收缩, 温度升高

引力势能转化为热能 经典理想气体压强公式 $p = k_B n T$ (k_B 为玻尔兹曼常数, n 为数密度)

$T \uparrow$ 压强 $p \uparrow$ 任一薄球层由于压强梯度 $\frac{dp}{dr}$ 导致的外向力 $\uparrow$.

向外辐射能量 同时继续不断收缩 (无内在能量)

$\Rightarrow$ 气团中心温度与密度高到足以点燃热核反应 星核 烧氢变氦 释放能量维持高压强

压强梯度足以抗衡引力, 气团不再收缩达到平衡 $\Rightarrow$ 形成恒星

壮年: 烧氢变氦维持稳定

$\rightarrow$ 星核内部氢全部变成氦, 温度不足以达到点燃氦的核聚变, 氦球在引力作用下收缩至热

周围薄层氢燃烧加剧, 星球外部膨胀和冷却 $\Rightarrow$ 形成红巨星 (red giant)

晚年: 氦球收缩导致高温高密可能达到点燃氦的聚变反应 烧氦变碳或氧 星核稳定

烧尽氦球后星核再次收缩. $\Rightarrow$ 寻找抗衡引力的能量.

恒星晚年命运因质量而异:

1° 质量较小的恒星 $M < 1.3 M_\odot$



经典物理学: 辐射能量 $\Rightarrow$ 无机制产生能量维持高温高压

量子物理学: 电子存在压强 一电子服从泡利不相容原理, 一个能级至多能被两个自旋相反的电子占据

$T=0$ 时 电子由基态填满至费米能 E_F (fermi energy) 为完全简并电子气 (degenerate electron gas)

E_F 随密度增大而增大.

电子气中的电子具有起源于不相容原理的动能, 对压强和能量密度有贡献

引起的压强称为电子简并压 (electron degenerate pressure)

星核在氢、氦烧完之后再次收缩造成的高密度电子具有费米能 $E_F \gg k_B T$.

热运动对压强中的贡献 $\ll$ 不相容原理和高 E_F 具有的动能对压强中的贡献, 故类似于 $T=0$ 情况

星体内的电子可看简并电子气, 其简并压抵消自引力, 使星体保持平衡永不收缩.

$\Rightarrow$ 依靠电子简并压支撑的稳定星体称为白矮星 (white dwarf)

$\Rightarrow$ 辐射能量后温度下降至周围温度相等, 成为黑矮星 (black dwarf)

天文观测: 天狼星B是人类发现的第一颗白矮星 半径: $3000 \sim 20000 \text{ km}$.

质量上限: 钱德拉塞卡 (Chandrasekhar) 极限 $M_{\text{Ch}} \approx 1.3 M_{\odot}$ M 为剩余质量 初始质量 $< 6 \sim 8 M_{\odot}$

2° 质量较大的恒星 $1.3 M_{\odot} < M < 2 M_{\odot}$ 不能通过核聚变放能

电子简并压无法维持星体平衡, 星核内部继续发生核聚变反应, 烧成铁和镍 [结合最紧的原子核]

星核在自引力作用下急剧收缩, 密度和温度急剧增大

$\Rightarrow$ 高能光子将铁-镍原子核打破成中子、质子和轻核 (光分裂)

电子和质子发生逆 β 衰变产生中子和中微子 $e + p \rightarrow n + \bar{\nu}_e$

中子服从泡利不相容原理, $T \approx 0$ 简并中子气的中子简并压抵消自引力, 使星体保持平衡而不收缩.

$\Rightarrow$ 依靠中子简并压支撑的稳定星体称为中子星 (neutron star)

质量上限: $2 M_{\odot}$ 半径: 10 km

极端表现: 高达核密度的密度、极强磁场 (10^{12} 高斯)、极高速旋转、接近光速的高声速、内部超流...

理论模型: 1939 年 Oppenheimer & Volkoff

天文观测: 1967 年 脉冲星 (pulsar) [周期性电磁脉冲信号的信号源]

— 旋转着的中子星, 表面强磁场导致磁偶极辐射, 辐射的方向性 + 中子星旋转

使地球收到电磁脉冲信号 要求星体半径很小且致密, 表面引力强

· 星核在形成中星之前的收缩非常急剧, 称为**引力坍缩** (gravitational collapse)

中子简并压遏制星核自引力作用下的急剧收缩, 向外的冲击波迫使外层物质向四周飞出.

形成能量极大的**超新星爆发** (supernova explosion) 超新星爆发详细机制仍待研究.

天文观测: 1054年 SN1054 遗迹—蟹状星云. (客星) 星际气体形成新一代的恒星

1987年 SN1987a 位于大麦哲伦云 (16万光年)

特点: 恒星光度大增, 抛射中微子(10^{51})带出能量 [太阳每秒中微子 $\rightarrow$ 中微子天文学], 产生元素

$\therefore$ 质量 $M > 2M_{\odot}$ 的恒星 无限坍缩为密度和曲率无限大的“奇点”, 形成施瓦西黑洞

§9.4 Kruskal 延拓和施瓦西黑洞

Kruskal extension and Schwarzschild black hole

9.4.1 时空奇点(奇性)的定义 Definition of spacetime singularity

施瓦西坐标下的施瓦西真度规 $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

$r=0$ g_{00} 与 g_{11} 无意义 $r=2M$ $g_{11} = \infty$ 无意义 线元 = 度规 g_{ab} + 坐标系 $\{t, r, \theta, \varphi\}$.

能使 $g_{\mu\nu}$ 变得无意义或退化的点为奇点 (singularity) $g_{\mu\nu}$ 在奇点处存在奇性

(1) 度规张量 g_{ab} 在该点表现良好, 是由于坐标选择不当而使 g_{ab} 在该点的某些分量在该点表现不好

称为坐标奇点 (coordinate singularity) 可通过选择适当坐标消除

$r=2M$

(2) 度规张量 g_{ab} 本身在该点表现不好 (奇异的) 称为时空奇点 (spacetime singularity)

$r=0$

4 连通流形 M $r>0$ 被奇点分为 $(0, 2M)$ 和 $(2M, +\infty)$

时空 (M, g_{ab}) 要求流形 M 是连通的, 度规 g_{ab} 是洛伦兹的, 在 M 上各点有意义且有良程度的可微性 (至少 C^2)

$\Rightarrow$ 施瓦西坐标下的施瓦西真度规 仅限于 $r>2M$

· 奇点(奇性)概念与物理量的发散性密切相关

例如：静电学中电场强度 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{r}$ 在 $r=0$ 没有意义，即 $\vec{E}$ 在 $r=0$ 有奇性。

广义相对论中奇点 $r=0$ 不属于时空，不满足 $g_{ab}|_p$ 有意义

难点：非广义相对论理论 背景时空给定 + 物理场在某时空点发散 $\Rightarrow$ 物理场奇点

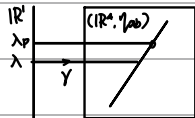
广义相对论中 背景场和物理场双重角色的度规场无意义 $\Rightarrow$ 时空奇性

$\Rightarrow$ 真正的时空应除去时空奇点 (M', g_{ab}) $M' \equiv M - \{p\}$ 。

考虑闵氏时空 $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ 中的一条不可延伸的任意测地线 $Y(\lambda)$ ，仿射参数 $\lambda \in (-\infty, +\infty)$

删去 $Y(\lambda)$ 的一点 p ，在 $\mathbb{R}^4$ 上留下一个洞， $M \rightarrow M' \equiv M - \{p\}$ 。

$Y(\lambda)$ 分裂为 $Y'(\lambda)$ ， $\lambda \in (-\infty, \lambda_p)$ 和 $Y''(\lambda)$ ， $\lambda \in (\lambda_p, +\infty)$



(incomplete geodesic)

(M, g_{ab}) 中一条不可延伸的测地线，仿射参数的取值范围不等于 $(-\infty, +\infty)$ ，则其被称为不完备测地线

限制：所讨论的时空必须是不可延拓的，即不能通过添加某些点使它变得更大 [排除人为挖去某些点]

Def 1 若不可延拓时空中存在一条(或以上)不完备的类时或类光测地线，则称它为奇异时空 (singular spacetime)

或说它有奇点(奇性)

物理意义：不完备类时测地线或类光测地线代表的自由下落观者或光子在有限时间内会在时空中消失。

补充：没有任何不完备测地线，但有一条非测地类时线线长有限， γ 加速大小有界，导致飞船内沿此曲线旅行的观者经有限时间会在时空中消失。——奇异时空。

· 特点：‘曲率发散性’。 定义时空奇性仍应用测地不完备性

① 由 R_{ab} 、 g_{ab} 和 ∇_a 构成的各种标量 (R 、 $R_{ab}R^{ab}$ 、 $R_{abcd}R^{abcd}$...) 及其多项式

其中一个量沿不完备测地线发散，则时空存在 S.P. 曲率奇性 (scalar polynomial curvature singularity)

② R_{abcd} 及其协变导数在沿测地线平移的任一标架场分量中至少有一个发散，则时空存在 P.P. 曲率奇性

S.P. 曲率奇性蕴含于 P.P. 曲率奇性 (P.P. S.P.) (parallely propagated curvature singularity)

时空是奇异的 $\Rightarrow$ 检查沿不完备测地线有无曲率发散性：具有 S.P. 曲率奇性或 P.P. 曲率奇性

① 有 S.P. 曲率奇性 ② 没有 S.P. 曲率奇性却有 P.P. 曲率奇性 ③ 没有曲率奇性 e.g. Taub-NUT 时空。

趋于无穷远时曲率才发散的时空不应视为奇异时空。

9.4.2 Rindler 度规的坐标奇点.

Coordinate singularity of Rindler metric

判断坐标奇点的充分性判据: 找到一个坐标使度规在该点的分量在奇点处表现正常

例: 2维Rindler时空的合适坐标寻找

$g_{\mu\nu}$ 在 $x=0$ 处存在奇性.

在 (t, x) 下 $ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2$ 度规分量的行列式 $g = -x^2$ 在 $x=0$ 处为零 $\Rightarrow$ 矩阵 $(g_{\mu\nu})$ 无逆, 度规 $g_{\mu\nu}$ 退化

x 的取值范围为 $x>0$ 或 $x<0$ (逐流形要求) 不失一般性限定 $-\infty < t < +\infty$ $0 < x < +\infty$

2维时空中每点只有两个类光方向 $\Rightarrow$ 全时空的类光测地线可分为两族

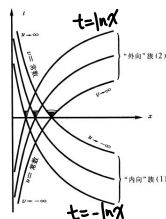
则可以断定 $x=0$ 为坐标奇点.

若某些类光测地线不完备, 则应怀疑所给时空是否被删去某些区域, 并尝试延拓时空且 $x=0$ 是延拓后时空一点

实现: $\eta(\lambda)$ 是Rindler时空的一条类光测地线, λ 为仿射参数, 切矢 $(\frac{\partial}{\partial \lambda})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial \tau})^\alpha \frac{dt}{d\lambda} + (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha \frac{dx}{d\lambda}$

由类光性质: $0 = g_{\alpha\beta} (\frac{\partial}{\partial \lambda})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \lambda})^\beta = g_{00} (\frac{dt}{d\lambda})^2 + g_{11} (\frac{dx}{d\lambda})^2 = -x^2 (\frac{dt}{d\lambda})^2 + (\frac{dx}{d\lambda})^2$ $\frac{dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{x}$

$t = \pm \ln x + C$ (C 为积分常数) $t + \ln x$ 和 $t - \ln x$ 在每一内向外向类光测地线上为常数



定义坐标 $v = t + \ln x$ $u = t - \ln x$ 即 $t = \frac{1}{2}(v+u)$ $x = e^{\frac{1}{2}(v-u)}$

$ds^2 = -e^{v-u} dv du$ $0 = g_{\mu\nu} = g_{00} (\frac{\partial}{\partial v})^\alpha (\frac{\partial}{\partial v})^\beta + g_{11} (\frac{\partial}{\partial u})^\alpha (\frac{\partial}{\partial u})^\beta = g_{uu} = 0$

$(\frac{\partial}{\partial u})^\alpha, (\frac{\partial}{\partial v})^\alpha$ 为类光分量 u, v 称为类光坐标 取值范围 $-\infty < u < +\infty$ $-\infty < v < +\infty$

v, u 并非仿射参数, 取值覆盖 $(-\infty, +\infty)$ 不能说明所有类光测地线完备.

沿任一类光测地线 $\eta(\lambda)$ 定义常数 $E = -g_{\alpha\beta} (\frac{\partial}{\partial \tau})^\alpha (\frac{\partial}{\partial \lambda})^\beta = -g_{00} \frac{dt}{d\lambda} = x^2 \frac{dt}{d\lambda}$

u 在任一外向类光测地线上为常数 将 x, t 依 u, v 的关系代入且用 $\frac{dt}{d\lambda} = \frac{dt}{dv} \frac{dv}{d\lambda}$ 可知 $d\lambda = e^v \frac{e^{-u}}{2E} dv$

解得 $\lambda = \frac{e^{-u}}{2E} \int e^v dv = \frac{e^{-u}}{2E} e^v + C_1$ (C_1 为积分常数)

令 $V = e^v$ 其也为外向类光测地线仿射参数

$V \in (0, +\infty)$ 外向类光测地线不完备

同理令 $U = -e^u$ 其也为内向类光测地线仿射参数

$U \in (-\infty, 0)$ 内向类光测地线不完备

Rindler 时空并非完整时空而是某个更大时空删去某些区域的结果:

$dU dV = e^{V-U} dV dU$ 线元 $ds^2 = -dV dU$ $0 < V < +\infty$ $-\infty < U < 0$

度规在 (U, V) 坐标下的非零分量 $g_{UV} = g_{VU} = -\frac{1}{2}$ 在 U, V 超出取值范围时表现良好

引入新坐标 U, V 实现了对Rindler度规的解析延拓.

$$\kappa^2 = e^{-u} = -UV$$

$\kappa=0$ 代表延拓后定义域中 $V=0, U=0$ 两条直线 ($\kappa=0$ 不属于原始坐标域)

坐标奇点(奇性) — 把原始坐标条不适当地用到了坐标域之外

定义新坐标 T, X $T := \frac{1}{2}(V+U)$ $X := \frac{1}{2}(V-U)$

$ds^2 = -dt^2 + dx^2$ Rindler 度规是平直度规, 与闵氏度规最多相差一个微分同胚(同几何)

$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2$ 为 2 维闵氏时空的一个子时空. 2 维闵氏时空是 Rindler 时空的最大延拓.

归约程序: $ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 = x^2 (-dt^2 + x^2 dx^2)$ 定义 κ 的函数 $\kappa_*(x)$ $d\kappa_* = x^2 dx$

$ds^2 = x^2 (-dt^2 + dx^2)$ 令 $V = t + \kappa_*$, $U = t - \kappa_*$ 则 $t = \frac{1}{2}(V+U)$, $\kappa_* = \frac{1}{2}(V-U)$ $-dt^2 + dx^2 = -dV dU$

$ds^2 = -x^2 dV dU = -e^{-u} dV dU = -dV dU$ 其中 $V = e^u$ $U = -e^{-u}$

类时 Killing 矢量场 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 即度规分量不含 t 简化寻找合适坐标

9.4.3 施瓦西时空的 Kruskal 延拓 Kruskal extension of Schwarzschild spacetime.

爱因斯坦方程的局域性(给定流形一点及其邻域) 求解后不能讨论度规所定义的流形整体性质

施瓦西真空度规 $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ $r > 2M$ 或 $0 < r < 2M$

线元前两项 $ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr^2 = (1 - \frac{2M}{r}) [-dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-2} dr^2] = (1 - \frac{2M}{r}) [dt^2 + dr_*^2]$

其中 $dr_* = (1 - \frac{2M}{r})^{-1} dr$ 取 $r_* := r + 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1)$ r_* 称为乌龟坐标(tortoise coordinate)

令 $V = t + r_*$ $U = t - r_*$ 即 $t = \frac{1}{2}(V+U)$ $r_* = \frac{1}{2}(V-U)$ 则 $-\infty < V < +\infty$, $-\infty < U < +\infty$

$-dt^2 + dr_*^2 = -dV dU \Rightarrow ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dV dU$

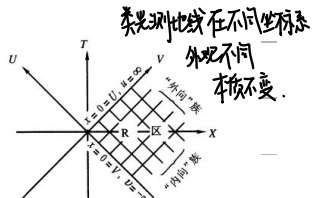
令 $V = e^{\beta V}$ $U = -e^{\beta U}$ β 为待定常数 则 $0 < V < +\infty$, $-\infty < U < 0$

$dV dU = \beta^2 e^{\beta(U-V)} dV dU \Rightarrow ds^2 = -\beta^2 (\frac{r-2M}{r}) e^{\beta(U-V)} dV dU$ $e^{\beta(U-V)} = e^{-2\beta r_*} = e^{-2\beta r} (\frac{r}{r-2M})^{2\beta M}$

$ds^2 = -\beta^2 (1 - \frac{2M}{r}) e^{2\beta r} (\frac{2M}{r-2M})^{2\beta M} dV dU$ 奇点 $r=0$, $r=2M$ (选 $\beta = \frac{1}{4M}$ 消去)

$\Rightarrow ds^2 = -\beta^2 \frac{2M}{r} e^{-2\beta r} dV dU = -\frac{32M^3}{r} e^{-\frac{r}{2M}} dV dU$ 度规分量在 $r=2M$ 处不再奇异 $\Rightarrow$ 可以延拓至 $U \leq 0, U > 0$

令 $T := \frac{1}{2}(V+U)$ $X := \frac{1}{2}(V-U)$



施瓦西时空在 Kruskal 坐标系 $\{T, X, \theta, \varphi\}$ 的线元表达式 $\tilde{ds}^2 = \frac{32M^3}{r} e^{\frac{r}{2M}} (-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$

原始施瓦西时空的延拓称为 Kruskal 延拓 T, X 可以取 $r > 0$ $(\frac{r}{2M} - 1)e^{\frac{r}{2M}} = -T^2 + X^2$

时空 $(\tilde{M}, \tilde{g}_{ab})$ 称为时空 (M, g_{ab}) 的一个延拓, 若 $M \subset \tilde{M}$ 且 $\tilde{g}_{ab}|_M = g_{ab}|_M$. $\forall p \in M$

在 2 维施瓦西图中, 径向类光曲线为 $\pm 45^\circ$ 斜直线 [存在因子 $-dT^2 + dX^2$], 图中每个都是一个二维球面 S^2

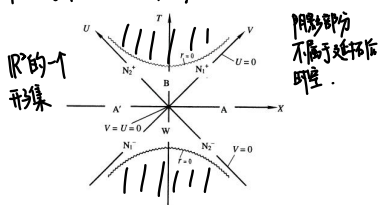
$r = \text{常数}$ 对应于 $X^2 - T^2 = \text{常数} \Rightarrow$ 1 维流形中的超曲面 - 旋转双曲面.

特例:

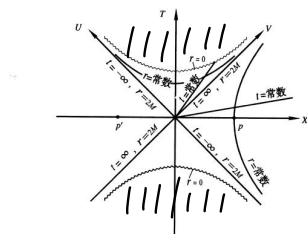
(1) $r=0$ 对应于 $X^2 - T^2 = -1$ Kruskal 延拓坐标限制范围 $r > 0 \Leftrightarrow X^2 - T^2 > -1$

任 $r > 0$ 的径向类光或类时测地线都不完备

标量场 $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ 在测地线上的值当 $r \rightarrow 0$ 时趋于 ∞



(a) A 和 A' 代表两个无因果联系的渐近平直区, B 为黑洞区, W 为白洞区. N_1^+ 和 N_2^+ 是黑洞的事件视界. 锯齿状曲线代表奇性所在处(不属于时空)



(b) 双曲线上 $r = \text{常数}$, 过原点直线上 $t = \text{常数}$, 两条过原点的 45° 斜直线上 $r = 2M, t = \pm \infty$.

利用 A 区坐标 U, V 与坐标 t, r 关系, 定义 B, W, A 区中的坐标 $t \Rightarrow ds^2$ 用于 B, W, A 区时 用 (t, r) 表出结果仍为 ds^2

A, A' 区和 B, W 区度规就是原始施瓦西线元 ds^2 分别限于 $r > 2M$ 和 $0 < r < 2M$ 的结果. $r_{\pm} = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|$.

可以得到 A, B, W, A' 区中坐标 T, X 和 t, r 之间的变换关系

$$T = T(t, r) \quad X = X(t, r) \quad \text{或} \quad r = r(T, X) \quad t = t(T, X)$$

Kruskal 延拓是施瓦西时空的最大延拓 (maximal extension)
 $r=0$ 是时空奇点, 存在 sp 曲率奇性

最大延拓的 4 维施瓦西时空的拓扑结构 $\mathbb{R}^2 \times S^2$

(2) $r = 2M$ 对应于 $X^2 - T^2 = 0$ 4 维时空中的两个 3 维类光超曲面
 时空被分为 4 个区域:

① A 区 $X > 0$ 且 $X^2 > T^2$ ($V > 0, U < 0$) $r > 2M$ 的时空区域

延拓后的时空为 $\tilde{M}$, 度规 $\tilde{g}_{ab}$ 坐标 $\{T, X\}$ } 线元相差一个坐标变换
 原时空为 M , 度规 g_{ab} 坐标 $\{t, r\}$ } 在 A 区有相同度规场

以 (A, g_{ab}) 为延拓出发区, 延拓出 A, B, W 区

边界 $U=0$ 或 $V=0 \Rightarrow t = 2M [\ln V - \ln(-U)] \rightarrow \pm \infty$

t 在边界斜直线上没有定义 —— 施瓦西线元在 $r=2M$ 表现奇异的原因



⇒ Birkhoff定理实质：若度规满足真空爱因斯坦方程且具有反映球对称性的3个Killing场，
 则必定有额外的第4个Killing场 ξ^a ，可以为类时（静态时空），类空（黑洞白洞），类光（事件视界）
 视所论时空点而确定

9.4.4 施瓦西时空的无限红移面 Surface of infinite redshift in Schwarzschild spacetime

设事件视界以外的静态观者G和G'的径向坐标分别为r和r' > r G向G'发出光

红移 $z \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ 对于施瓦西时空 $\frac{\lambda'}{\lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r'}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$ r'固定 $z = z(r)$ $\frac{dz}{dr} < 0$

$\lim_{r \rightarrow 2M} z(r) = \infty$ 起曲面 $r = 2M$ 称为无限红移面 (surface of infinite redshift)

其上任一点发出的外向类光测地线都只能停在视界上而不能到达G

施瓦西时空中 只有个起曲面正交的类时Killing矢量场 $\xi^a \rightarrow$ 有一个静态参考系

$\xi^a \equiv \xi^a + b\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^a$ (b为常数) 仍是类时Killing场 $\rightarrow$ 无限多个静态参考系

一般情况 无限红移面对应于 $-\xi^a \xi_a = 0$ 依赖于所涉及的静态参考系。

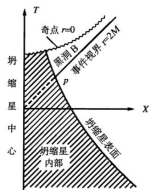
$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\lambda}{\lambda'}$ 或 $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \infty$ 对静态参考系都适用。 其中红移因子 $\lambda \equiv (-\xi^a \xi_a)^{-\frac{1}{2}}$

施瓦西时空 静态参考系唯一 无限红移面即指 $-\xi^a \xi_a = 0$ 与事件视界重合。 $\lambda = (-\xi^a \xi_a)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$

9.4.5 嵌入图 Embedding picture.

9.4.6 球形恒星引力塌缩和施瓦西黑洞

初始质量大于中子星质量上限的恒星若不能在演化中抛出足够质量达到稳定, 就会不断塌缩产生黑洞。

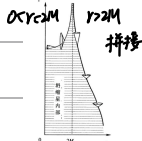


由Birkhoff定理, 星外时空由施瓦西度规, 星内时空由非真空解描述 $\Rightarrow$ AE与BE

当星体表面越过事件视界之后, 就只能不断收缩压进奇点。

用施瓦西坐标描写恒星坍塌: 星体表面与 $r=2M$ 交于 $t=\infty$ (t 在 $r=2M$ 处发散)

但星体表面观者在 $r=2M$ 固有时却是有限大。



利用内网Eddington坐标 $\{v, r, \theta, \varphi\}$ 描述恒星坍缩成黑洞的过程 [覆盖AE和BE]

$$v = t + r_*$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 \Rightarrow ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr \quad r=2M \text{ 不再是奇点. } v \in (-\infty, +\infty) \rightarrow v \in (0, +\infty)$$

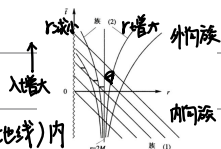
$g_{rr}=0$ 故 $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^\mu$ 为类光向量 $g_{vv} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ 故 $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)^\mu$ 在AE类时而在BE类空

考虑A、BE区内任一向类光测地线 $\eta(\lambda)$ $0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dv}{d\lambda}\right)^2 + 2 \frac{dv}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} = \frac{dv}{d\lambda} \left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{d\lambda} + 2 \frac{dr}{d\lambda} \right]$

则任一向类光测地线有两族 ① $\frac{dv}{dr} = 0$ 即 $v = \text{const.}$ ② $-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{d\lambda} + 2 \frac{dr}{d\lambda} = 0$ 故 $\frac{dv}{dr} = \frac{2r}{r-2M}$

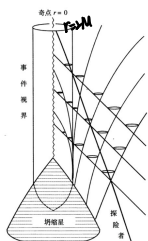
令 $\xi := v - r$ $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\xi^2 + \frac{4M}{r} d\xi dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2$

内向族 $\frac{d\xi}{dr} = -1$ 外向族 $\frac{d\xi}{dr} = \frac{r-2M}{r+2M}$ $r=2M$ 为竖直线



质点的世界线为类时线, 线上每点切矢必须限于该点的光锥 (两族类光测地线) 内

$\Rightarrow$ 事件视界外的质点可以穿越视界进入黑洞, 进入后无法逃出掉入奇点



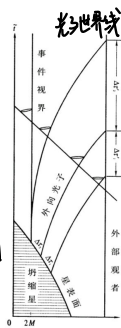
—— 坍塌为黑洞的星体外部时空几何

星体表面所发的外向光子到达外部静态观者——

外部观者看见星体收缩越来越慢, 星体趋于

某一大小 $r=2M$ 并冻结 [引力场中的钟慢效应]

相邻波峰世界线



测得光波周期

比较: 两条相邻的径向光子世界线在星体表面观者和星体外部观者世界线上分别定出的固定时间 Δt 和 $\Delta t'$

计算得 $\Delta t' > \Delta t$ 且若 $\Delta t_1 = \Delta t_2$, $\Delta t'_1 > \Delta t'_2$

$\Delta t'/\Delta t$ 随时间增加而增加

外部观者收到的光波有较大波长, 红移越来越大

第十章 宇宙论 Chapter 10 Cosmology

研究对象: 宇宙 — 无所不包的最大时空, 其时空与物质场之间的关系满足广义相对论

(特殊性: 宇宙演化只此一次, 且中途观测, 无法重复实验 / 此时此刻能够观测到的是整个宇宙的部分)

研究方法: 通过大量观测积累数据, 通过构造模型解释观测结果, 推断过去和预言未来

⇒ 宇宙学的标准模型 (standard model).

重要修改: 1998年观测表明当今宇宙正在加速膨胀

§10.1 宇宙运动学 Kinematics of the Universe

10.1.1 宇宙学原理. [标准模型的基本假设].

• 宇宙学原理 (cosmological principle): 每一时刻的宇宙在空间大尺度上是均匀且各向同性的.

Einstein 于 1917 年提出.

(spatially homogeneous and isotropic).

空间均匀: 空间中各点的物理情况相同 [宇观尺度, $> 3 \times 10^8$ 光年]

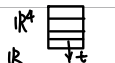
↔ 宇宙中物质分布呈现“结团”现象: 物质 → 恒星 $\xrightarrow{10^6 \sim 10^5}$ 星系 (galaxy) e.g. 银河系 (Milky-Way) →

星系团 (cluster of galaxies) → 超星系团 (supercluster)

空间各向同性: 任一观者向任一方向看到的物理情况相同. [宇观]. “宇观抹匀”

• 空间概念: 某时刻 t 的全空间.

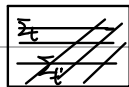
非相对论物理学: 每个绝对同时面 Σ



狭义相对论: 每个惯性系 $\{t, x, y, z\}$ 的等 t 面 Σ_t .

① 每层都是一张类空超曲面

$(\mathbb{R}^4, g_{ab})$



$\{t, x\}$.

② 所有层的集合 $\{\Sigma_t\}$ 是一个单族, 即任一实数值 t 对应唯一一层 Σ_t

广义相对论: 具有上述两个特点的任何分层方式 (任-单类空超曲面族)

每层代表这一时刻的全空间

(M, g_{ab})



时空具有一定对称性 ↔ 与此对称性相适应的分层讨论方便.

时空的空间均匀性和各向同性性是时空内在对称性的反映.

——存在分层方式在各点中各点的几何和物理情况全同 [空间为均匀面].

——存在参考系其中每个观者在每一时刻都无法用局域实验发现他的任-空间方向 (正交于他的世界线的方向) 有利于其他空间方向

10.1.2 宇宙的空间几何 宇宙时空 $(M, g_{ab}) \xrightarrow{\text{induced}}$ 空间 (Σ_t, h_{ab})

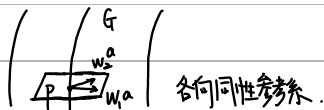
Def 1. 时空 (M, g_{ab}) 称为空间均匀的 (spatially homogeneous)

若存在把 M 分层的单参数类超曲面族 $\{\Sigma_t\}$ 使得对 $\forall t \in \mathbb{R}$. $\forall p, q \in \Sigma_t$ 存在 h_{ab} (由 g_{ab} 在 Σ_t 上诱导的度规) 的等度规映射 $\phi: \Sigma_t \rightarrow \Sigma_t$ 使 $\phi(p) = q$ [$\phi^* h_{ab} = h_{ab}$]

每一张 Σ_t 称为一张均匀面 (surface of homogeneity)



空间均匀性.



各向同性参考系.

Def 2 时空 (M, g_{ab}) 中的参考系称为各向同性 (isotropic) 参考系

若对其中任一观者 G (4速为 Z^a) 世界线上 $\forall p \in G$ 及 $w_1^a, w_2^a \in W_p$ (等长空间向量 $|w_1| = |w_2|$).

存在 g_{ab} 的等度规映射 $\psi: M \rightarrow M$ 使 $\psi(p) = p$ [$\psi^* g_{ab} = g_{ab}$]

且 $\psi_* w_1^a = w_2^a$, $\psi_* Z^a = Z^a$ 各向同性参考系内的观者称为各向同性观者.

存在各向同性参考系的时空称为各向同性时空.

例如: 每个星系 (观测对象) 是一个各向同性观者 (星系的本动速度使其略微偏离)

$\Rightarrow$ 各向同性参考系与其均匀面 Σ_t 之间的关系:

同的时空中任一观者世界线 G 与均匀面 Σ_t 不一定正交 (两者所属的惯性系不一致时)

但只要空间均匀和各向同性有唯一的均匀面族, G 与 Σ_t 的正交性成立.

Claim 10-1-1 若空间均匀且各向同性时空有唯一的均匀面族, 则均匀面必定处处与各向同性观者世界线正交

Pf: G (各向同性观者). 假设均匀面 Σ_t 不正交于 G 在 P 点的4速 Σ^a $w^a, w_2^a \in \ell_P$.



令 w^a 为切于 Σ_t 的矢量, w_2^a 为不切于 Σ_t 的矢量

① 等度规映射 $\psi^* g_{ab} = g_{ab} \Rightarrow \psi[\Sigma]$ 是均匀面

② $\psi(P) = P \Rightarrow \psi[\Sigma]$ 和 Σ 都含 P 点 $\Rightarrow P = \psi[\Sigma] \cap \Sigma$

均匀面族的唯一性 [过一点仅有一个均匀面] $\Rightarrow \psi[\Sigma] = \Sigma$.

由于“曲线切矢的像等于曲线像的切矢” w^a 切于 $\Sigma \Rightarrow \psi_* w^a$ 切于 $\psi[\Sigma]$

w_2^a 不切于 Σ , 故 $\psi_* w^a \neq w_2^a$ 不存在满足条件的等度规映射 ψ , 与 G 为各向同性观者矛盾.

接受宇宙学原理 (假设) $\rightarrow$ 默认宇宙的均匀面族是唯一的.

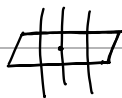
$\Rightarrow$ 各向同性观者世界线与均匀面正交

此各向同性参考系称为宇宙静系

对宇宙时空做“正交3+1分解” $\left\{ \begin{array}{l} \text{每一均匀面} = \text{一个时刻的全空间} \\ \text{每一各向同性观者世界线} = \text{一个空间点的全部历史} \end{array} \right.$

讨论任一时刻的空间 Σ_t 的3维几何

(Σ_t, h_{ab})



• 常曲率空间 (space of constant curvature)

广义黎曼空间 (M, g_{ab}) 称为常曲率空间, 若存在常数 K 使其黎曼张量满足

$$R_{abcd} = 2K g_{ca} g_{bd}$$

Claim J-1-2 常曲率空间具有最高对称性

即其等度规群的维数/独立 Killing 矢量场个数 $\dim \mathcal{K} = \frac{n(n+1)}{2}$, 其中 n 为空间维数

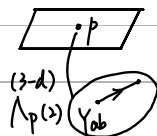
流形维数. 度规公差及 K 值相同的两个常曲率空间有相同的局域几何.

Claim 10-1-2 设 h_{ab} 是宇宙时空度规 g_{ab} 在均匀面 Σ_t 上的诱导度规, $\hat{R}_{abc}{}^d$ 是 h_{ab} 的曲率张量, $\hat{R}_{abcd} \equiv h_{de} \hat{R}_{abc}{}^e$ 则存在常数 K 使 $\hat{R}_{abcd} = 2Kh_{c[a}h_{b]d}$

Pf: 设 $\Lambda_p(2)$ 是 3 维流形 Σ_t 上点 $p \in \Sigma_t$ 的全体 2 形式集合.

$$\dim \Lambda_p(2) = \frac{(n-3)!}{(n-1)!4!} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \quad ab \text{ 自身反对称} \quad (\Sigma_t, h_{ab})$$

$$\text{令 } \hat{R}_{ab}{}^{cd} = h_{ce} \hat{R}_{ab}{}^e{}^d \quad \text{则 } \forall Y_{cd} \in \Lambda_p(2) \quad \hat{R}_{ab}{}^{cd} Y_{cd} \in \Lambda_p(2)$$



故 $\hat{R}_{ab}{}^{cd} : \Lambda_p(2) \rightarrow \Lambda_p(2)$ 的线性映射. $\Lambda_p(2)$ 是 3 维向量空间

故 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}$ 对应于 3×3 矩阵 L 由 $\hat{R}_{abcd} = \hat{R}_{cdab}$ 可知矩阵 L 是对称的.

$$\xRightarrow{\text{basis}} \text{ 对称矩阵 } L = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{22} & 0 \\ 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix} \quad \text{由各向同性性} \Rightarrow \text{对角相等.}$$

+ 均匀面族的唯一性.

由此 $L = 2KI$. 单位矩阵 I 对应于 $\Lambda_p(2) \rightarrow \Lambda_p(2)$ 的恒等变换 $\delta_a{}^c \delta_b{}^d I$.

$$\delta_a{}^c \delta_b{}^d I Y_{cd} = \delta_a{}^c \delta_b{}^d Y_{cd} = \delta_a{}^c \delta_b{}^d Y_{cd} = Y_{ab}. \Rightarrow \hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2K \delta_a{}^c \delta_b{}^d I.$$

$$\otimes h_{ce} h_{af} \Rightarrow \hat{R}_{abef} = 2K \delta_a{}^c \delta_b{}^d I h_{ce} h_{af} = 2K \delta_a{}^c \delta_b{}^d h_{ce} h_{af} = 2K h_{c[a} h_{b]d}$$

$$\text{即 } \hat{R}_{abcd} = 2Kh_{c[a}h_{b]d}.$$

$\Rightarrow$ 宇宙的均匀面 (Σ_t, h_{ab}) 是常曲率空间, 几何仅取决于 K 的值.

III $K=0$ 空间平直 $\hat{R}_{ab}{}^{cd}=0$ 空间线元 $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

IV $K>0$ 空间为三维球面. 4 维欧氏空间 $(\mathbb{R}^4, \delta_{ab})$ 中 3 维球面上由 δ_{ab} 诱导的度规

$$\text{2 维球面嵌入 3 维欧氏空间 } \{x, y, z\} \rightarrow \{r, \theta, \varphi\} \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$$

$$\text{3 维球面嵌入 4 维欧氏空间 } \{x, y, z, w\} \rightarrow \{R, \chi, \theta, \varphi\}. \quad x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = dR^2 + R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

$$dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

$$\hat{R}_{ab}{}^{cd} = 2R^{-2} \delta_a{}^c \delta_b{}^d I. \quad K = R^{-2} > 0.$$

$$\text{球坐标} \begin{cases} x = R \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \sin \chi \cos \theta \\ w = R \cos \chi \end{cases}$$

③ $K < 0$ 空间为双曲面.

3维双曲面嵌入4维闵氏空间 $\{t, x, y, z\} \rightarrow \{\chi, \psi, \theta, \varphi\}$. $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \bar{\chi}^2$

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -d\bar{\chi}^2 + \bar{\chi}^2 [d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

$$d\bar{\chi}^2 = \bar{\chi}^2 [d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

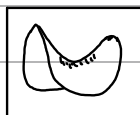
$$R_{abcd} = -2\bar{\chi}^2 \delta_a^{[c} \delta_b^{d]} \quad K = -\frac{1}{\bar{\chi}^2} < 0$$

双曲坐标

$$\begin{cases} \chi = \bar{\chi} \sinh\psi \sin\theta \cos\varphi \\ y = \bar{\chi} \sinh\psi \sin\theta \sin\varphi \\ z = \bar{\chi} \sinh\psi \cos\theta \\ t = \bar{\chi} \cosh\psi \end{cases}$$



闵氏时空的双曲面.



$(\mathbb{R}^3, \delta_{ab})$

$\Rightarrow$ 由宇宙学原理可知宇宙在任一瞬间(即任均匀面)的

通俗讲法: 由平均用 K 代表.

局域空间几何只能是3种情况:

闭 (a) 3维球面度规, 线元用 ψ, θ, φ 表为 $dl^2 = K^{-1} [d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$ $K > 0$

开 (b) 3维平面度规, 线元用 x, y, z 或 ψ, θ, φ 表为

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\psi^2 + \psi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad K = 0$$

开 (c) 3维双曲面度规, 线元用 ψ, θ, φ 表为 $dl^2 = -K^{-1} [d\psi^2 + \sinh^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$ $K < 0$

10.1.3 弗里德曼-勒梅特-罗伯特-沃克度规

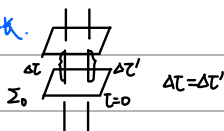
Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric, FLRW.

宇宙时空度规 g_{ab} : 在每一均匀面 Σ_t 上的诱导度规为 h_{ab} (对应于空间线元 $dl^2 = h_{ab} dx^a dx^b$).

$$\{t, x^i\} \text{ 坐标下. } ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 + 2g_{0i} dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j$$

任意两个各向同性观者的世界线于任意两张均匀面之间的线长必定等长.

Pf: 利用均匀面族的选取唯一性.



选定坐标系: 在均匀面 Σ_0 上选(局域)坐标 $x^1 \equiv \chi$ $x^2 \equiv \theta$ $x^3 \equiv \varphi$

① 用各向同性观者世界线将空间坐标携带至其余均匀面上, 即同一世界线上各点的空间坐标相同.

② 调节每一各向同性观者的标准钟的初始设定 $\tau|_{\Sigma_0} = 0$.

每一时空点的时间坐标 τ 定义为过该点的各向同性观者的固有时 τ $t \equiv \tau$

⇒ 宇宙时空的一个坐标系 $\{t, x^i\}$ Robertson-Walker (RW) 坐标系 - 各向同性参考系的一个共动坐标系

且坐标系中的时间坐标 t 与均匀面族 $\{Z_t\}$ 的参数 t 约定一致。

⇒ 优点 1) 等 t 面 (同时面) = 均匀面。代表宇宙在 t 时刻的全空间

2) t 坐标线 (等 x^i) = 各向同性观者世界线, 且其上的坐标时 = 固有时 τ , 称为 **宇宙时**。

坐标基矢 $(\frac{\partial}{\partial t})^a = (\frac{\partial}{\partial \tau})^a \equiv Z^a$ 各向同性观者的 4-速, $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$ 切于均匀面, 与 $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ 正交

$$g_{00} = g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial t})^b = g_{ab} Z^a Z^b = -1$$

$$g_{0i} = g_{ab} (\frac{\partial}{\partial t})^a (\frac{\partial}{\partial x^i})^b = 0 \quad i=1,2,3 \quad w^a, w_b \in W_p$$

$$g_{ij} = g_{ab} (\frac{\partial}{\partial x^i})^a (\frac{\partial}{\partial x^j})^b = h_{ab} (\frac{\partial}{\partial x^i})^a (\frac{\partial}{\partial x^j})^b = h_{ij}(t, x) \quad \text{诱导度规定义 } h_{ab} w^a w^b = g_{ab} w^a w^b$$

利用均匀面族的唯一性对 h_{ij} 分离变量 $h_{ij}(t, x) = a^2(t) \hat{h}_{ij}(x)$

由此 4 维宇宙度规在上述坐标系的线元 $ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \boxed{\hat{h}_{ij}(x) dx^i dx^j} = dL^2$

$$(a) \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\psi^2 + \sin^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

$$(b) \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\psi^2 + \psi^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)] = -dt^2 + a^2(t) [dx^2 + dy^2 + dz^2]$$

$$(c) \quad ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\psi^2 + \sinh^2\psi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

[正实数 $k^{-1}|_{k>0}$ 和 $-k^{-1}|_{k<0}$ 吸收进 $a(t)$ 或坐标]

$$\text{定义 } r \equiv \begin{cases} \sin\psi & (a) \quad dr = \cos\psi d\psi, \quad d\psi^2 = \frac{1}{1-\sin^2\psi} dr^2 = \frac{dr^2}{1-r^2} \\ \psi & (b) \\ \sinh\psi & (c) \quad dr = \cosh\psi d\psi, \quad d\psi^2 = \frac{1}{1+\sinh^2\psi} dr^2 = \frac{dr^2}{1+r^2} \end{cases}$$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad k = \begin{cases} +1 & k>0 \\ 0 & k=0 \\ -1 & k<0 \end{cases}$$

— FLRW 度规 [宇宙学原理 + 均匀面族唯一性的默认]。

待定部分 ① k 的取值决定空间几何 ② $a(t)$ 的具体函数形式决定空间的动力学演化

R 度因子 (scale factor) $a(t)$ 的物理意义:

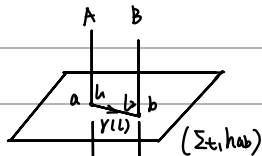
设 h_{ab} 是 FLRW 度规在均匀面 Z_t 上的诱导度规, 则 (Z_t, h_{ab}) 是 3 维黎曼空间

[h_{ab} 正定]。

设 a, b 分别是星系 A, B (合同同性观者) 与 Σ_t 的顶点.

$\gamma(l)$ 是 a, b 之间的, 身向在 Σ_t 上的测地线, 则其线长

便是 a 与 b (作为 Σ_t 上的) 距离 [两点之间所有线段长度的下确界]. l 是仿射参数.



$$D_{AB}(t) = \int_a^b \sqrt{h_{ab}(l) \left(\frac{\gamma}{\gamma l}\right)^a \left(\frac{\gamma}{\gamma l}\right)^b} dl \quad \text{令 } h_{ab} = a^2(t) \bar{h}_{ab} \quad a(t) \text{ 取正值.}$$

$$= a(t) \int_a^b \sqrt{\bar{h}_{ab} \left(\frac{\gamma}{\gamma l}\right)^a \left(\frac{\gamma}{\gamma l}\right)^b} dl = a(t) \hat{D}_{AB}. \quad \hat{D}_{AB} \text{ 只取决于星系 } A, B \text{ 而与时间无关}$$

$\Rightarrow$ 尺度因子 $a(t)$ 是以 $\hat{D}_{AB}$ 为单位在时刻 t 测 A, B 距离所得的值. $\sqrt{h}$.



$k=+1$ 时宇宙封闭 与 h_{ab} 适配的体元 $\hat{\Sigma} = a^3 \sin^2 \varphi \sin \theta d\varphi \wedge d\theta \wedge d\varphi$.

在任一时刻 t 的体积 $V = \int \hat{\Sigma} = \int a^3(t) \sin^2 \varphi \sin \theta d\varphi \wedge d\theta \wedge d\varphi$.

$$= a^3(t) \int_0^\pi d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = 2\pi^2 a^3$$

即 $a(t)$ 为封闭宇宙在时刻 t 的半径.

§10.2 宇宙动力学 Dynamics of the Universe

10.2.1 哈勃定律. Hubble's law

20 世纪初 Slipher 观测河外星系的光谱, 41 个星系 36 个发生红移 (波长变大).

设 λ 和 λ' 分别是发光时和光到达地球时的波长, 则 $z \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda}$ 为红移.

解释: 多普勒效应. (蓝移为太阳与它门相向运动)

$\Rightarrow$ 宇宙膨胀的观测基础.

1923 年起 哈勃测量河外星系与我们的距离 $\rightarrow$ 红移 z 与距离 D 成正比.

$$z \equiv \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 = \frac{\omega}{\omega'} - 1 = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} - 1 \cong u \quad (-\text{非近似}) \quad z \propto D, z \cong u \Rightarrow u \propto D.$$

1929 年 哈勃定律. $u = H_0 D$ 当今星系退行速度正比于当今星系距离, 系数为哈勃常数 (Hubble constant).

定义两个星系的相对速率 $u(t) := \frac{dD(t)}{dt}$ $D(t) = a(t) \hat{D}_{AB}$ $\hat{D}_{AB}$ 仅取决于星系 A, B.

$$u(t) = \hat{D}_{AB} \frac{da(t)}{dt} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} D(t) = H(t) D(t). \quad \text{当今时刻 } t=t_0 \quad u(t=t_0) = H(t=t_0) D(t=t_0)$$

定义哈勃参数 (Hubble parameter) $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ 哈勃常数是哈勃参数的当今值.

哈勃定律 $u(t) = H(t) D(t)$ 对给定时刻 t , 任意两个星系之间的退行速率正比于两者距离

① $D(t) \neq 0, H_0 > 0$ 则有 $u(t_0) > 0$ 任一星系观测另一星系时都发现其离自身退行远去.

$\Rightarrow$ 宇宙膨胀没有中心.

② D 足够大使 u 可以大于光速. [退行速率 u 定义为星系距离对宇宙时间的导数]

相对论的基本原则之一: 质点的世界线是类时曲线 (绝对的)

任何质点的速率都小于光速 (相对的)

[locally measured relative velocity] 定义: 由观者对质点做当时当地测量所得的速率.

$\Rightarrow$ 不导致谬误 (推导 FLRW 度规过程中早已承认每一星系的世界线是类时曲线).

10.2.2 宇宙学红移 cosmological redshift.

宇宙学红移是弯曲时空效应, 不是平直时空的多普勒效应. (近邻星系的时空曲率效应不明显)

几何光学近似下光信号沿测地线传播, $\mathcal{Z}^a$ 为星系观者 A 的 4 速

该星系 A 在 P_1 发出的光子沿类光测地线 $\eta(\beta)$ 运动, 在 P_2 被星系 B 收到.

$$\text{光子在 } P_1 \text{ 点相对于观者 A 的角频率 } \omega_1 = -g_{ab} \mathcal{Z}^a K^b \Big|_{P_1}$$

$$\text{光子的 4 波矢 } K^b \equiv \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \right)^b = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^b \frac{dt}{d\beta} + \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \frac{dx^i}{d\beta} \quad \{t, r, \theta, \varphi\}$$

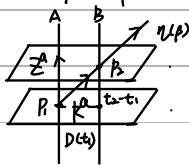
$$\omega_1 = -g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^a \left[\left(\frac{\partial t}{\partial \beta} \right)^b \frac{\partial t}{\partial \beta} + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \beta} \right)^b \frac{\partial x^i}{\partial \beta} \right] \Big|_{P_1} = \frac{dt}{d\beta} \Big|_{P_1} \quad \omega_2 = \frac{dt}{d\beta} \Big|_{P_2} \Rightarrow \omega(\beta) = \frac{dt(\beta)}{d\beta}$$

$$\eta(\beta) \text{ 所满足的测地线方程 } \frac{d^2 x^\mu}{d\beta^2} + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\beta} \frac{dx^\sigma}{d\beta} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad x^\mu = t, r, \theta, \varphi$$

$$\text{度规分量. } g_{00} = -1 \quad g_{11} = a^2(t) \frac{1}{1-kr^2} \quad g_{22} = a^2(t) r^2 \quad g_{33} = a^2(t) r^2 \sin^2 \theta.$$

$$\text{非零联络 } \Gamma^0_{11} = a\dot{a}(1-kr)^{-1} \quad \Gamma^0_{22} = a\dot{a}r^2 \quad \Gamma^0_{33} = a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta$$

$$\Gamma^r_{01} = \Gamma^r_{10} = \frac{\dot{a}}{a} \quad \Gamma^r_{11} = kr(1-kr)^{-1} \quad \Gamma^r_{22} = -r(1-kr^2) \quad \Gamma^r_{33} = -r(1-kr^2) \sin^2 \theta$$



$$\Gamma^2_{02} = \Gamma^2_{20} = \Gamma^3_{03} = \Gamma^3_{30} = \frac{a}{a} \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta \quad \Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \cot\theta$$

$$\begin{aligned} \mu=2 \quad \frac{d^2\theta}{d\beta^2} + 2\frac{a}{a}\frac{dt}{d\beta}\frac{d\theta}{d\beta} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\beta}\frac{d\theta}{d\beta} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{d\beta}\right)^2 &= 0 \\ \mu=3 \quad \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} + 2\frac{a}{a}\frac{dt}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\beta} + \frac{2}{r}\frac{dr}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\beta} + 2\cot\theta\frac{d\theta}{d\beta}\frac{d\varphi}{d\beta} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \mu=2 \\ \mu=3 \end{aligned}} \right\} \theta(\beta) = \theta_0 \quad \varphi(\beta) = \varphi_0$$

选择坐标系使 $\theta(p_1) = \theta_0, \varphi(p_1) = \varphi_0$, 同时 $K^a|_{p_1}$ 在 $(\frac{\partial}{\partial\theta})^a$ 和 $(\frac{\partial}{\partial\varphi})^a$ 分量为零.

$$\frac{d\theta}{d\beta}|_{p_1} = 0, \frac{d\varphi}{d\beta}|_{p_1} = 0 \quad [\text{空间投影产生的矢量正交于}\theta\text{与}\varphi\text{坐标线}].$$

由于 $\eta(\beta)$ 给定, 即 $\eta^a = \eta^a(\beta)$ 为确定的函数, 上两式为关于 $\theta(\beta)$ 和 $\varphi(\beta)$ 的 2 阶联立常微分方程组.

而 $\theta(\beta) = \theta_0$ 和 $\varphi(\beta) = \varphi_0$ 是满足初始条件 $\theta(p_1) = \theta_0, \varphi(p_1) = \varphi_0, \frac{d\theta}{d\beta}|_{p_1} = 0, \frac{d\varphi}{d\beta}|_{p_1} = 0$ 的唯一解.

$\Rightarrow K^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a \frac{dt}{d\beta} + (\frac{\partial}{\partial r})^a \frac{dr}{d\beta}$ 对任一给定的测地线 $\eta(\beta)$, 总可通过重新选定 θ, φ 坐标

$$\frac{d\theta}{d\beta} = \frac{d\varphi}{d\beta} = 0 \quad \text{使}\eta(\beta)\text{成为径向测地线} [\text{沿测地线}\theta, \varphi\text{为常数}].$$

$$\mu=0 \quad \frac{d^2t}{d\beta^2} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\left(\frac{dr}{d\beta}\right)^2 = 0$$

$$\text{类光性} \quad 0 = g_{ab}K^aK^b = g_{ab}\left[(\frac{\partial}{\partial t})^a \frac{dt}{d\beta} + (\frac{\partial}{\partial r})^a \frac{dr}{d\beta}\right]\left[(\frac{\partial}{\partial t})^b \frac{dt}{d\beta} + (\frac{\partial}{\partial r})^b \frac{dr}{d\beta}\right].$$

$$= -\left(\frac{dt}{d\beta}\right)^2 + \frac{a^2}{1-kr^2}\left(\frac{dr}{d\beta}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{dt}{d\beta}\right)^2 = \frac{a^2}{1-kr^2}\left(\frac{dr}{d\beta}\right)^2 \quad a = a(t) = a(t(\beta))$$

$$\text{可得} \quad \frac{d^2t}{d\beta^2} + \frac{a}{a}\frac{d\dot{a}}{d\beta} = 0 \quad \text{且} \quad \omega(\beta) = \frac{dt}{d\beta} \quad \text{则} \quad \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{dt}{d\beta}\omega = \frac{d\omega}{d\beta} + \frac{\omega}{a}\frac{da}{d\beta} = 0$$

解出 $\omega = \omega_0 a^{-1}$ (ω_0 为积分常数) $\omega \equiv \frac{dt}{d\beta}$ 为过 $\eta(\beta)$ 上任一点的各向同性观者测得的光子频率

$\lambda \propto a$ 随着宇宙膨胀 (a 增大), 宇宙中每一光子 (相对于各向同性观者) 的波长都正比地增大 (红移)

$$\text{考虑 } p_1, p_2 \text{ 两点} \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}$$

$$\text{相对红移量} \quad z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} - 1.$$

$$A, B \text{ 距离足够小} \quad a(t_2) \approx a(t_1) + \dot{a}(t_1)(t_2 - t_1)$$

$$\text{类光测地线} \quad 0 = ds^2 = -dt^2 + \underline{dl^2}$$

$$\approx a(t_1) + \dot{a}(t_1) D(t_1).$$

$$t_2 - t_1 \approx D(t_1).$$

$$\rightarrow z = \frac{1}{a(t_1)}[a(t_1) + \dot{a}(t_1)D(t_1)] - 1 = \frac{\dot{a}(t_1)}{a(t_1)}D(t_1) = H(t_1)D(t_1)$$

$$z = H(t_1)D(t_1) \quad \text{符合哈勃观测结果}$$

10.2.3 尺度因子的演化. Evolution of the scale factor

Einstein equation $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$ FLRW 度规 $\rightarrow G_{ab} + T_{ab} \Rightarrow a(t)$ 的微分方程.

四 守恒动量: 宇宙的内容物 (contents) = 物质 (matter) + 辐射 (radiation) + 暗能量 (dark energy)

物质: 静质量非零的粒子构成的内容物 (实物) / 辐射: 静质量为零的粒子构成的内容物 (场)

贡献: 星系 / 微波背景电磁辐射 $\Rightarrow$ [新模型] 星系 + 暗物质 / 微波背景辐射 / 暗能量

① 星系 $\Rightarrow$ 理想流体 $\Rightarrow$ 尘埃 (压强可忽略). 星系近似为各向同性观者

$T_{ab}(\text{matter}) = \rho_m U_a U_b$ U^a 为各向同性观者的 4 速, ρ_m 为各向同性观者测得的物质能量密度.

② 辐射 $\Rightarrow$ 理想流体 $\Rightarrow$ 光子 (4 速等于各向同性观者的 4 速, $p = \frac{1}{3}\rho$)

$T_{ab}(\text{radiation}) = p_r U_a U_b + p(g_{ab} + U_a U_b)$ ρ_r 及 p 为各向同性观者测得的辐射能量密度和辐射压强

$\Rightarrow T_{ab}(\text{total}) = \rho U_a U_b + p(g_{ab} + U_a U_b)$ ρ 为尘埃 (星系) 和辐射的总能量密度.

$$T_{00} = T_{ab} U^a U^b = \rho + p(g_{ab} U^a U^b + U_a U^a U_b U^b) = \rho \quad T_{0i} = T_{i0} = 0$$

$$T_{ij} = T_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b = p g_{ab} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b = p g_{ij} \quad T_{11} = p a^2 (1 - \dot{a}^2) \quad T_{22} = p a^2 \dot{a}^2 \quad T_{33} = p a^2 \dot{a}^2 \sin^2 \theta$$

四 爱因斯坦张量 G_{ab}

$$\text{非零分量 } G_{00} = \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} \quad G_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) g_{ij}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{爱因斯坦方程 } 00 \text{ 分量 - Friedmann 方程 } \frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi\rho \\ ij \text{ 分量 } \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi p \end{array} \right\} \text{ 决定尺度因子 } a(t) \text{ 的基本方程.}$$

$$\text{可知 } 3\ddot{a} = -4\pi a(\rho + 3p). \quad + \text{ 微分 Friedmann 方程 } 6\dot{a}\ddot{a} = 6\pi p a \dot{a} \Rightarrow \dot{a} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0$$

$\rho > 0, p > 0, a > 0 \Rightarrow \ddot{a} < 0$ 宇宙或膨胀 ($\dot{a} > 0$) 或收缩 ($\dot{a} < 0$), 除过渡时刻无 $\dot{a} = 0$, 即宇宙不会处于静态

观测表明当今宇宙正在膨胀 $\dot{a}(t_0) > 0$ $\ddot{a} < 0$ 可得 $\dot{a}(t) > \dot{a}(t_0) \quad \forall t < t_0$.

$a(0) = 0$ 密度极大 — 大爆炸奇点 (big bang singularity)

大爆炸对应于一个时空奇性, 不能向过去延拓.

— 存在无限趋近于它的不完备类时测地线, 物质密度和曲率标量构成的某些标量在趋于它时发散

2° 大爆炸的时刻宇宙空间没有大小 $a(0)=0$

星系形成(结团)需要过程——结构形成理论

3° 大爆炸下的物质在每一时刻都均匀充满整个宇宙空间。粒子之间距离增大是空间膨胀的表现

讨论两个极端宇宙： $\Rightarrow$ 足够小时宇宙由辐射主导，目前接近于物质主导 Friedmann 方程 $\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - k$

1a) Tab 是完全来自物质(尘埃) 尘埃宇宙 $p=0$ $\rho a^3 = \text{常数}$ $\rho \propto a^{-3}$

任一共动体积随 a 增大而按 a^3 增大，体积内尘埃粒子数(能量)不变，故密度随 a^3 减小。

$$\text{定义 } A \equiv \frac{8\pi}{3}\rho a^3 = \text{const} \rightarrow \dot{a}^2(t) = A a^{-1}(t) - k. \quad \text{引入新变量 } \hat{t}(t) \equiv \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

$$\text{初始条件 } a(0)=0$$

$$a^2(\hat{t}) = A a(\hat{t}) - k a^2(\hat{t}). \quad \dot{a} \equiv \frac{da}{dt} = \frac{da}{d\hat{t}} \frac{d\hat{t}}{dt} \equiv \dot{a} \frac{1}{a(\hat{t})}$$

$$\textcircled{1} k=+1 \quad a = \frac{A}{2}(1 - \cos \hat{t}) \quad t = \frac{A}{2}(\hat{t} - \sin \hat{t})$$

$$\textcircled{2} k=0 \quad a = \left(\frac{9A}{4}\right)^{1/3} \hat{t}^{2/3}$$

$$\textcircled{3} k=-1 \quad a = \frac{A}{2}(\cosh \hat{t} - 1) \quad t = \frac{A}{2}(\sinh \hat{t} - \hat{t})$$

1b) Tab 是完全来自辐射(光子) 辐射宇宙 $p = \frac{1}{3}\rho$ $\rho a^4 = \text{常数}$ $\rho \propto a^{-4}$

任一共动体积随 a 增大而按 a^3 增大，体积内光子数(能量 $E \propto \omega \propto a^{-1}$) 由于红移而按 a^4 减小，故密度按 a^4 减小。

$$\text{定义 } B \equiv \frac{8\pi}{3}\rho a^4 = \text{const} \rightarrow \dot{a}^2(t) = B a^{-2}(t) - k \quad \text{变量替换 } b(t) \equiv a^2(t) \quad b' = 2a\dot{a}$$

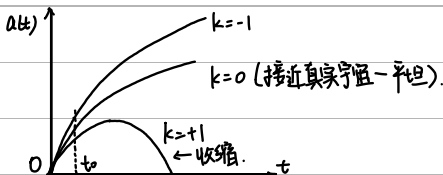
$$\text{初始条件 } a(0)=0$$

$$b^2(t) = 4B^2 - 4kb. \quad \text{解得 } a^2(t) \equiv b(t) = 2Bt - kt^2$$

$$\textcircled{1} k=+1 \quad a^2(t) = 2Bt - t^2$$

$$\textcircled{2} k=0 \quad a^2(t) = 2Bt$$

$$\textcircled{3} k=-1 \quad a^2(t) = 2Bt + t^2$$



模型中的宇宙——减速膨胀。大挤压奇点 (big-crunch singularity)

Friedmann 1922年得出尘埃宇宙解 Hubble 1929年观测结果 Robertson, Walker 1935年得出度规

$\Rightarrow$ 标准宇宙模型被称为 Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker 模型。

Einstein 静态宇宙模型——添加宇宙学常数项 $\Lambda \Rightarrow$ Dark Energy 加速膨胀机制

定性讨论实际宇宙 (既含实物又含辐射):

① 观测表明当今宇宙正在膨胀 $\dot{a}(t_0) > 0$

$t < t_0$ $a(t)$ 曲线向上凸起, 与 t 轴相交于 $t=0$ 时刻

$$t > t_0 \quad \dot{\rho} + 3(\rho + p) \frac{\dot{a}}{a} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \frac{d(\rho a^3)}{da} = -3\rho a^2$$

$$3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho \quad \longleftrightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8}{3}\pi\rho a^2 - k. \quad \dot{a} \text{ 随 } a \text{ 变化情况与 } k \text{ 值有关}$$

$$a \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty) \quad k=0 \quad \dot{a} \rightarrow 0 \quad k=-1 \quad \dot{a} \rightarrow +1.$$

$k=+1$ $t=t_c$, $a=a_c$ 满足 $\frac{8}{3}\pi\rho a^2 = 1$ 为极大值 $t < t_c$, $\dot{a} > 0$ 不断减小至 $t=t_c$, $\dot{a}=0$ / $t > t_c$, $\dot{a} < 0$

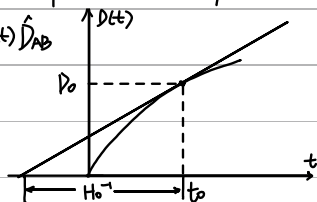
③ 宇宙年龄

星系实际距离 $D(t) = a(t) \hat{D}_{AB}$

若膨胀一直以当今速率 u_0 进行 $t_0 = \frac{D_0}{u_0} = \frac{D_0}{H_0 D_0} = H_0^{-1}$

$$H_0 \cong (20 \text{ km/s}) / \text{百万光年} \Rightarrow t_0 \cong H_0^{-1} \cong 13512 \text{ 年. (13)}$$

提高哈勃常数 H_0 的测量精度. $H_0 = 100h \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ ($0.4 \leq h \leq 1$)



$$1 \text{ Mpc} = 10^6 \text{ pc (parallax second 秒差距)} \quad 1 \text{ pc} \cong 3.26 \text{ 光年}. \quad H_0 = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1} (h=0.71 \left\{ \begin{smallmatrix} +0.04 \\ -0.03 \end{smallmatrix} \right\})$$

③ FLRW 度规 描述是宇宙在宇观尺度下的行为

较小尺度下的局部行为 $\rightarrow$ 根据该局部的物质分布情况选择适当度规描述

10.2.4 宇宙学常数项和爱因斯坦静态宇宙. The cosmological constant & the Einstein static universe.

$$\text{爱因斯坦方程. } G_{00} = 8\pi T_{00} \Rightarrow 3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho$$

$$\text{分量形式 } G_{ij} = 8\pi T_{ij} \Rightarrow 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi p \quad \xrightarrow{\text{静态}} \quad \begin{matrix} 3k = 8\pi\rho^2 \\ k = -8\pi p^2 \end{matrix} \quad \text{在 } \rho > 0, p > 0 \text{ 条件不相容}$$

故修改爱因斯坦方程 $\tilde{G}_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad \tilde{G}_{ab} = \tilde{G}_{ba}, \nabla^a \tilde{G}_{ab} = 0 \Rightarrow \tilde{G}_{ab}$ 只能取 G_{ab} 和 g_{ab} 的线性组合.

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = T_{ab} \quad \text{其中 } \Lambda \text{ 为宇宙学常数 (cosmological constant).}$$

$$G_{ab} = 8\pi (T_{ab} - \frac{1}{8\pi} \Lambda g_{ab}) \quad \text{新“能动量”} \quad T_{ab} = \bar{T}_{ab} - \frac{1}{8\pi} \Lambda g_{ab}. \quad \bar{T}_{ab} \text{ 为原能动量.}$$

$$\text{尘埃模型含 } \bar{\rho} \text{ 不含 } \bar{p} \quad \rho = T_{00} = \bar{T}_{00} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{00} = \bar{\rho} + \frac{\Lambda}{8\pi}$$

$$\text{FLRW 度规} \quad p g_{ij} = T_{ij} = \bar{T}_{ij} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{ij} = -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{ij} \quad p = -\frac{\Lambda}{8\pi} < 0 \text{ (if } \Lambda > 0)$$

引入 $\Lambda > 0$ 项 $\Leftrightarrow$ 在宇宙中加入压强 p 为负的物质.

$$\text{Friedmann 方程} \quad \left. \begin{aligned} 3k &= 8\pi a^2 (\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{8\pi}) \\ k &= \Lambda a^2 \quad \bar{\rho} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} k &= 4\pi a^2 \bar{\rho} > 0 \quad \text{故 } k = +1 \quad \text{空间几何为球面几何} \\ \Lambda &= a^{-2} \quad \bar{\rho} = \frac{1}{4\pi a^2} \end{aligned}$$

爱因斯坦静态宇宙度规 (metric of Einstein static universe).

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad \text{其中 } a^2 = \Lambda^{-1} = \text{常数}$$

—— 不稳定静态解 (微扰后要收缩或膨胀)

§10.3 宇宙的热历史. The thermal history of our universe

10.1 宇宙演化简史 A brief history of evolution of the universe

根据标准模型勾勒出的宇宙从大爆炸至今的演化简史.

宇宙由以辐射为主的阶段 转到 以物质为主的阶段 $t = 10^4 \text{ s}$ 大爆炸后数千年.

考虑宇宙的温度变化 (绝热膨胀): 早期宇宙辐射 $\rho \propto a^{-4}$ 辐射的能量统计 $\rho \propto T^4$

则 $T \propto a^{-1}$ (a 足够小时 k 可以忽略 $a(t) = (2\pi t)^{1/2}$). $T = 10^4 / \sqrt{t}$ $t=0$ 时 $T \rightarrow \infty$

宇宙的演化是从温度无限高的大爆炸奇点开始的. 温度不断下降的绝热膨胀过程.

1. 大爆炸奇点 ① 原初奇点, 如宇宙起源大爆炸的奇点 ② 终了奇点, 如大质量恒星晚期坍缩

时空奇点: 许多物理量在趋近奇点时无限大 (密度, 曲率等), 一切物理定律在奇点处失效.

1965年-1970年 Penrose 和 Hawking 借用整体微分几何证明了一系列奇点定理.

只要某些合理条件满足 (不含对称性要求), 时空奇点无法避免

奇点定理 $\rightarrow$ 奇点的存在性 / 经典广义相对论在奇点附近的不适用性. 经典 = 非量子.

$\checkmark$ 时空结构和引力本质 $\times$ 量子理论的基本原则

极率性预言.

量子理论: 任一可观测量不能有确定值 (除非系统处于该量的本征态), 对测量结果只能做

广义相对论: 所有可观测量 (如度规) 都有确定值 (世界线描述) Hawking: 考虑量子效应后奇点可避免

⇒ 极早期宇宙 $[0, t_c]$ 应使用引力的量子理论 (量子引力论 quantum gravity 尚未建立完整理论).

量纲分析 t_c 涉及时空, 引力及量子论 [光速 c , 引力常数 G , 普朗克常数 h]

临界时间 $t_c = t_p = \left(\frac{Gh}{c^3}\right)^{1/2} \sim 10^{43} s$ 普朗克时间

补充A: 量子力学.

① 物理量取值的量子化: 能量 $\rightarrow$ 能级

② 粒子的自旋 S (无经典对应) $\begin{cases} \text{半整数 } \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots \text{费米子 fermion (e, p, n} \dots) \\ \text{整数 } 0, 1, 2 \dots \text{玻色子 boson (}\gamma\text{)} \end{cases}$

补充B: 粒子物理

引力 (gravity)

① 相互作用 interaction - 强相互作用力 (strong), 弱相互作用力 (weak), 电磁相互作用力 (EM)

② 粒子与反粒子 antiparticle

e.g. 电子 (e) electron 与 正电子 (e^+) positron 带电量相反, 静质量相同

正负电子对的产生 (由光子激发) $2\gamma \rightarrow e + e^+$

粒子的发现 □ 宇宙射线 cosmic rays 因加速器 accelerator

③ 中微子 Neutrinos

质子 (p) proton 中子 (n) neutron 光子 (γ) photon

$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$ 不带电, 质量非常小, 与其他粒子相互作用十分微弱, 可自由穿越地球, 自旋 $S = \frac{1}{2}$

④ 介子 Mesons 传递相互作用的基本粒子 传递电磁相互作用的是光子 (力程无穷远, 粒子零静质量)

1935 汤川秀树 强相互作用的中间玻色子为介子, 质量约为 $200 m_e$

1942 坂田昌一 两种介子 π 介子与 μ 子 (1937 年发现, 不参与强相互作用)

π^+
 强子 hadron: 参加强相互作用的粒子 ($p, n, \pi^+, \pi^-, \dots$)
 轻子 lepton: 不参加强相互作用的粒子 ($e, \bar{e}, \mu, \dots$) τ .
 光子 (γ).

⑤ 强子结构 Hadron Structure (down, up, strange, charm, bottom, top).

夸克 quark (1964年 Gell-Mann 提出): 组成强子的粒子, 有三种颜色 (R, G, B), 有六种味道

两种电荷 ($e, -e$) 之间的电磁相互作用 — 光子 γ 传递 QED

三种色荷 (R, G, B) 之间的强相互作用 — 胶子传递 QCD 3个夸克组成的强子无色

味道不同的夸克所带电荷不同

$$p = d u u \left(\frac{2}{3} \times 2 - \frac{1}{3} = 1e \right)$$

$$n = d u u \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times 2 = 0e \right)$$

$$\pi^+ = \bar{d} u \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1e \right)$$

$$\pi^- = d \bar{u} \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -1e \right)$$

	d	u	s	c	b	t
charge (e)	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

颜色 味道

$$\Rightarrow 3 \times 6 = 18 \text{ 种夸克}$$

夸克
 轻子
 第一代 $e, \nu_e \dots$
 第二代 $\mu, \nu_\mu \dots$
 第三代 $\tau, \nu_\tau \dots$
 中间玻色子: 光子 γ , 胶子 $\dots$

⑥ 相互作用的统一 Unification of interaction

电磁相互作用统一模型 Weinberg-Salam model

利用规范理论 Gauge Theory (1954年 Yang-Mills) 数学工具: 纤维丛 Fiber Bundle

规范变换 $\phi(x) \rightarrow \phi'(x)$ 应使物理体系的拉氏量保持不变

规范变换是相互作用的源.

$\Rightarrow$ 修改体系的拉氏量使其满足规范不变性 — 加入规范场 (电磁场) 相互作用

量子化规范场 $\rightarrow$ 规范粒子 (光子) 静质量为零.

所有的同一类规范变换构成一个规范群 e.g. 电磁规范变换 $\Rightarrow U(1)$ [$\dim=1$] $\Leftrightarrow$ 电磁场 γ
 — 李群 Lie group: group and manifold $SU(2)$ [$\dim=3$] 要求有3个规范粒子

1960s Goldstone, Higgs 研究对称性的自发破缺. $\rightarrow$ 使得 $SU(2)$ 的规范粒子有静质量

1979年 Weinberg, Salam 电弱统一模型 $U(1) \times SU(2)$
 光子 γ W^+ W^- Z^0
 0 80 GeV 90 GeV (大质量粒子传播力程极短的弱相互作用)

1973年 实验证实存在中性弱流

1983年 CERN 实验验证 W, Z 玻色子.

$\Rightarrow$ 大统一模型 grand unification theory (GUT). 其中一个模型: $SU(5)$.

$\gamma + W^\pm, Z^0 + \text{gluon (g)}$ [8种] + X^μ (超弱作用粒子 10^{15} GeV) [12种] = 24个规范粒子.

预言: 质子会发生衰变(寿命 $10^{28} \sim 10^{33}$), 重子数不守恒

$\Rightarrow$ 超统一模型: 引力 + 电磁相互作用 + 弱相互作用 + 强相互作用.

其中一种理论: 超弦理论 superstring

2. 早期宇宙的热平衡. Thermal equilibrium in the early universe

讨论 $t=10^{-43}\text{ s}$ 之后一小段时间的宇宙:

主要由能量极高的正反粒子对组成, 包括夸克, 轻子, 传递相互作用的规范玻色子 (gauge boson) ...

高能粒子之间频繁相互作用 (平均自由程短) $\Rightarrow$ 热平衡状态. ("一锅充分搅拌的基本粒子汤").

早期宇宙粒子之间的相互作用率远大于宇宙膨胀率 [多种粒子局域热平衡]

相对论性粒子 $\left\{ \begin{array}{l} \text{辐射粒子 (温度为 } T \text{ 的辐射中辐射粒子平均能量约为 } k_B T) \\ \text{近光速运动的实物粒子 (静能远小于 } k_B T). \end{array} \right.$

$$t=0.01\text{ s } T=10^9\text{ K } k_B T = 1.38 \times 10^{-23} \times 10^9 / (1.6 \times 10^{-19}) = 10\text{ MeV } \text{光子}$$

$$m_e c^2 = 0.511\text{ MeV} \approx 0.5\text{ MeV } \text{电子}$$

量子场论 两个光子 $\xrightleftharpoons[\text{"对湮灭"}]{\text{"对产生"}}$ 某种粒子的正反粒子对
 $2\gamma \quad (e, e^+)$

室温 $k_B T \ll m c^2$ 电子对产生与湮灭过程发生概率几乎为0

$T = 10^4 K$ $k_B T \gg m c^2$ 对产生速率 $\propto$ 光子密度 对湮灭速率 $\propto (e, e^+)$ 电子对密度
平衡时 电子对与光子密度大致相等。

质子, 中子 $m_p \approx 1840 m_e$ ($p, \bar{p}$) 和 ($n, \bar{n}$) 密度几乎为零, 存在极少量质子和中子

3. 物质和反物质的不对称性 Asymmetry of particles & antiparticles

$t = 0.01 s$ $T = 10^{11} K$ 宇宙的内容物: 大量中微子 ν 和反中微子 $\bar{\nu}$, 大量光子 γ , 大量电子对 (e, e^+)
少量质子 p 和中子 n

$t < 0.01 s$ $T = 10^{13} K$ $k_B T > m_p c^2$ 大量的正反质子对 ($p, \bar{p}$), 正反中子对 ($n, \bar{n}$), 少量 p, n

当今宇宙中物质主要由质子和中子构成, 反粒子在温度下降时被湮灭

$\Rightarrow$ 当今宇宙存在关于粒子和反粒子(物质和反物质)的不对称性. $\bar{n}_b / n_\gamma = \frac{n_b}{n_\gamma} \sim 10^{-10} \neq 0$.

一开始时重子与反重子数量相等, 在极早期宇宙演化中出现重子的不对称性。

要求重子数不守恒 $\Leftrightarrow$ GUT 高能情况下的预言。

4 中微子退耦 Neutrino decoupling.

$t = 1 s$ $T = 10^9 K$ (温度与密度降低) 中微子与其它粒子的相互作用率远小于宇宙膨胀率。

平均自由程增大, 近似成为无相互作用的自由粒子充满宇宙, 不与其他粒子处热平衡中。

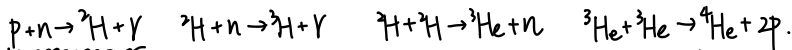
——中微子的退耦 独立演化, 当今温度为 $T = 2 K$ 。

5. 原初核合成 Primordial nucleosynthesis. $t = 100 s$

① 解释氦丰度问题 (helium abundance). 氦约占宇宙质量 $1/4$ 但无法解释来源。

$T > 10^9 K$ 高能光子击碎质子和中子结合成的氦核 ("光分裂"). 2H (deuterium) 3H (tritium)

10^8K (稍小) $< T < 10^9 \text{K}$ 核子数密度低 + 宇宙快速膨胀 $\Rightarrow$ 仅有两粒子反应发生



"氢关卡" 形成的氦不分裂 ${}^2\text{H}+p \rightarrow {}^3\text{He}+\gamma \quad {}^2\text{H}+{}^3\text{H} \rightarrow {}^4\text{He}+n \quad {}^2\text{H}$ 为氘, ${}^3\text{H}$ 为氚

$\Rightarrow$ 主要积累的产物为 ${}^4\text{He} \Rightarrow$ 生成一点 ${}^7\text{Li}$ [重于 ${}^7\text{Li}$ 的元素在恒星演化的过程中产生]

${}^3\text{H}$ 不稳定破裂要变为 ${}^3\text{He}$, 故产物有 ${}^4\text{He}, {}^2\text{H}, {}^3\text{He}, {}^7\text{Li}$ 核反应: 引力坍缩及起新星爆发

质量比例 1 10^5 10^5 10^{10}

核合成结束前中子和质子的数密度之比 $n_n/n_p \Rightarrow$ 原初核合成产生的氦丰度:

中微子退耦前 质子和中子通过弱相互作用转换 $p+e \leftrightarrow n+\bar{\nu}_e, p+\bar{\nu}_e \leftrightarrow n+e^+$

由于中子质量 $>$ 质子质量 ($m_n = m_p + 2.5 m_e$), 质子变中子的过程更难发生.

正反应达到统计平衡时 $\frac{n_n}{n_p} < 1$ 即玻尔兹曼公式 $\frac{n_n}{n_p} = e^{-\Delta m/k_B T}$ ($\Delta m \equiv m_n - m_p$).

$T_{\text{dec}} \approx 10^9 \text{K}$ 时中微子退耦 n, p 互变过程基本停止, $\frac{n_n}{n_p} \sim e^{-\Delta m/k_B T_{\text{dec}}}$ 被冻结 ($t_{\text{dec}} \approx 1 \text{s}$)

考虑自由中子的自发衰变 $n \rightarrow p+e+\bar{\nu}_e$ 时 n 半衰期可观部分 $\sim$ 氦合成时宇宙年龄 ($t \approx 10^2 \text{s}$)

$\Rightarrow \frac{n_n}{n_p}$ 略低于冻结值 $e^{-\Delta m/k_B T} \sim \frac{1}{7}$

令 $\sigma \equiv \frac{n_n}{n_p}$ 总核数 $N \equiv N_n + N_p = (\sigma + 1) N_p$ 氦中所含核子数 $N_{\text{He}} = 2N_n = 2\sigma N_p$.

原初核合成产生的氦丰度 $Y = \frac{N_{\text{He}}}{N} = \frac{2\sigma N_p}{(\sigma + 1) N_p} = \frac{2\sigma}{\sigma + 1} = 2 \left(\frac{n_n}{n_p} \right) \left(1 + \frac{n_n}{n_p} \right)^{-1} \approx 0.25$

观测到的氦丰度推断原初氦丰度 $Y \approx 0.23$

宇宙学标准模型 三大基石 (理论预言符合实际观测)

① 宇宙在膨胀 ② 原初核合成理论计算氦丰度 ③ 宇宙微波背景辐射

${}^2\text{H}, {}^3\text{He}, {}^7\text{Li}$ 的丰度对宇宙中重子与光子数密度之比 $\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} \approx (3.4 \sim 5) \times 10^{-10}$ 敏感.

1个重子被百万个光子包围

η 影响光分裂的难易 $\Rightarrow$ 影响核合成的开始时刻 $\Rightarrow$ 影响产物丰度

$\eta \approx (3.4 \sim 5) \times 10^{-10}$ 产物理论丰度与观测丰度符合

1° 支持核合成理论 2° 确定参数 η 的范围.

② 确定中微子的种类数 N_ν 为 3. 轻子 lepton: $e, \nu_e / \mu, \nu_\mu / \tau, \nu_\tau$.

1976年 Steigman 指出中微子种类的增加会使宇宙原初核合成的主要产物 ${}^4\text{He}$ 的丰度增加.

${}^4\text{He}$ 的观测丰度 $\rightarrow N_\nu$ 的上限: k 在 a 很小时可忽略 $H = \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow H^2 = \frac{8}{3}\pi\rho$

中微子种类 $N_\nu \rightarrow \rho$ 较大 $\rightarrow H$ 较大, 宇宙膨胀较快 $\rightarrow$ 中微子提前退耦 t_{rd} 较小 T_{rd} 较大

$\frac{n_\nu}{n_p} = \sigma = e^{-\frac{4m}{k_B T_{\text{rd}}}}$ 冻结时比例较大 $\Rightarrow Y^4 = \frac{1}{20} + 1$ 产生的 ${}^4\text{He}$ 丰度较高

1977年 $N_\nu \leq 7$ 1990年 $N_\nu \leq 3.3$ Walker 结果与欧洲核子研究中心 CERN 的加速器结果 $N_\nu = 3$ 一致

“宇宙论可对粒子物理学提出重要限制、宇宙是高能加速器的重要补充”

b. 宇宙微波背景辐射 Cosmic Microwave Background Radiation (CMBR)

$t \approx 10^{13} \text{s} \approx 4 \times 10^5 \text{年}$ $T \approx 3000\text{K} - 4000\text{K}$ $k_B T \approx 0.3 \text{eV}$

电子无足够能量挣脱核的电磁束缚 原子核 + 电子 $\xrightarrow{\text{电磁作用}}$ 中性原子

光子是电磁相互作用的中间玻色子.

⎧ 实物为电离状态(等离子体): 光子与带电粒子有频繁相互作用

⎩ 实物为中性状态: 光子与其几乎无相互作用, 平均自由时间大于宇宙当今年龄

$\Rightarrow$ 宇宙对于光子变得透明(即逃离运动) 光子退耦 photon decoupling

退耦前 光子与实物粒子达到热平衡, 能量密度按波长的分布满足黑体辐射曲线:

普朗克公式 $du = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} (e^{hc/k_B T} - 1)^{-1} d\lambda$ du 为单位体积内波长在 $(\lambda, \lambda + d\lambda)$ 范围内的光子能量

退耦后 仍满足普朗克公式 温度 T 随尺度因子 $a(t)$ 增大而反比下降:

空间膨胀 $a \rightarrow a' = \alpha a$ 红移 $\lambda \rightarrow \lambda' = \alpha \lambda$ 单位体积光子数 $\times \frac{1}{\alpha^3}$ 每光子能量 $\times \frac{1}{\alpha}$

则 $du' = \alpha^{-4} du = \frac{8\pi hc}{\alpha^4 \lambda'^5} (e^{hc/k_B T} - 1)^{-1} d\lambda \equiv \frac{8\pi hc}{\lambda'^5} (e^{hc/k_B T'} - 1)^{-1} d\lambda'$ 其中 $T' = \alpha^{-1} T$.

退耦后光子系统的当今温度 $T_0 \approx 2.73\text{K}$ $\lambda \approx 0.1\text{cm}$ (微波波段)

— 当今宇宙由大量背景光子所均匀充满, 其能量密度按波长分布由 $T \approx 2.73\text{K}$ 那条黑体辐射曲线描述.

辐射能量主要集中在微波波段 $\Rightarrow$ CMBR.

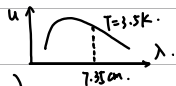
1965年 Penzias, Wilson 观测到各向同性的 CMBR — 1978年诺贝尔奖.

$\lambda = 1.35\text{cm} \sim T = 3.5\text{K}$

确定大爆炸遗迹的条件 ①能谱分布是黑体辐射曲线

② 高度的各向同性性 (各个方向测得强度(温度)相等)

1967年证实非各向同性性不超过0.3%。



1989年 NASA发射宇宙背景探测者 COBE (Cosmic Background Explorer)

对宽广的波段做测量并得到非常完美的黑体辐射曲线

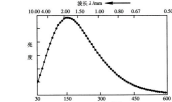


图 10-11 COBE 测得的宇宙背景辐射曲线(根据 1990 年发表的图画出),
相应的黑体温度为 $T = 2.725 \text{ K}$

测量背景辐射的各向同性性：将温度 T 作为角度函数展开

非各向同性性主要表现为两个最低级的环流函数：偶极矩 (dipole moment), 四极矩 (quadrupole moment)

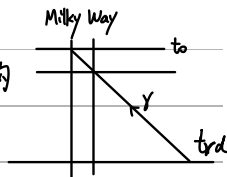
— 非各向同性度的幅值分别为 $T_1/T_0 \sim 10^{-3}$ $T_2/T_0 \sim 10^{-5}$

T_1/T_0 : 观者并非完美各向同性观者: 地球绕太阳, 太阳绕银河系中心, 银河系“本动速度”

⇒ 地球相对于各向同性系(宇宙静系)的准确速率为 $350 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

T_2/T_0 : 宇宙本身微小的非各向同性, 经引力放大后形成宇宙的大尺度结构

⇒ 标准模型胜于稳恒态宇宙模型 (steady state model, Hoyle 提出)



7. 结构形成 structure formation

$$t \approx 10^9 \text{ 年}$$

宇观上大尺度空间具有均匀性和各向同性性 $\leftrightarrow$ 小尺度上宇宙呈现有层次的结构

- 今天宇宙的复杂结构起源于极早期宇宙中非常微弱的密度扰动 (涨落 fluctuation) $\frac{\delta \rho}{\rho}$

ρ 为平均密度, $\delta\rho$ 为该点密度与 ρ 之差.

$\frac{\delta \rho}{\rho} > 0$ 物质在引力作用下收缩于此点, 导致更高的密度涨落

1902年 Jeans 静态流体中的密度涨落

1946年 Lifshitz 膨胀宇宙中密度涨落被放大的理论

⇒ 结构形成模型: 重子物质 (主要由质子、中子组成) + 非重子暗物质 nonbaryonic dark matter

① 热暗物质模型——结构形成自上而下 先形成超星系团，再逐级破裂为星系团和星系

② 冷暗物质模型—结构形成自下而上 先形成星系,再逐级形成星系团和超团

原初扰动的起因: 作为初始条件指定 $\Rightarrow$ 由暴胀模型提供

[极早期宇宙极短时间内指数式急剧加速膨胀]

$\Rightarrow$ 以暴胀提供的原初扰动为种子的冷暗物质模型

19.3.2 暗物质 Dark Matter

FLRW度规 $k=1$ 封闭宇宙 $k=0$ $k=-1$ 开放宇宙 $\frac{3(\dot{a}^2 + k)}{a^2} = 8\pi\rho$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k c^2}{a^2} \xrightarrow{\times \frac{3}{8\pi G}} \frac{3H^2}{8\pi G} = \rho - \frac{3k c^2}{8\pi G a^2}$$

临界密度 (critical density) $\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \Rightarrow \rho = \rho_c + \frac{3k c^2}{8\pi G a^2}$

$\rho = \rho_c$ 开放宇宙 $k=0$

$\rho > \rho_c$ 封闭宇宙 $k=1$ $\rho < \rho_c$ 开放宇宙 $k=-1$

宇宙几何取决于引力强弱是否能拉回粒子 $\sim$ 宇宙质量密度 ρ

密度参数 $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$ 以 ρ_c 为单位的密度

[Ω 与 ρ_c 都是时间 t 的函数]

当今参数值 $\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0$ 取决于当今宇宙的平均质量密度 ρ_0 与哈勃参数 H_0

$\Rightarrow$ 计算当今质量密度 (设星系是宇宙主要内容物) 星系数密度为 n , 星系平均质量为 $\bar{M}$ 则 $\rho_0 = n\bar{M}$

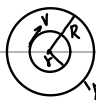
设宇宙空间中单位体积的光度 (光度密度 luminosity density) 为 $\mathcal{L}$, 星系平均光度为 $\bar{L}$ 则 $\mathcal{L} = n\bar{L}$

可得 $\rho_0 = \mathcal{L} \frac{\bar{M}}{\bar{L}}$ 其中 $\frac{\bar{M}}{\bar{L}}$ 为平均质光比 (average mass-to-light ratio) $\Omega_0 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \mathcal{L} \frac{\bar{M}}{\bar{L}}$

1° 实际测量 2° 减小误差

测量螺旋星系 (spiral galaxy) 质量的动力学方法:

椭圆星系 (elliptical galaxy)



恒星以星系的引力为向心力绕星系中心做半径为 r 的圆轨道运动 $m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2}$

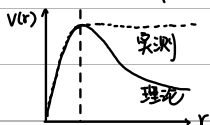
$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r}$ $v(r)$ 曲线为星系的转动曲线 (rotation curve)

其中 $v(r)$ 是离中心为 r 处恒星的轨道运动速率, $M(r)$ 是星系在半径 r 以内的质量

R 为星系光度消失处的 r , 则 $M(R)$ 代表星系发光物质的质量 $\Rightarrow$ 质光比 $\frac{M}{L}$

计算发光物质对 Ω_0 的贡献: Ω_0 (发光物质) $\approx 0.5\%$ 质量密度不到临界密度 (平坦宇宙) 1%

若 $r > R$ 无质量 则 $v(r)$ 曲线从 $r=R$ 处以外 $r^{-1/2}$ 下降.
实际星系转动曲线——从星系中心陡然升起, 再近似水平延伸



$\Rightarrow$ 旋涡星系在发光部分外有一个半径比 R 大得多的球状“暗晕” (dark halo) 质量为发光物质的 $3 \sim 10$ 倍

椭圆星系也有大量暗物质 (dark matter) 考虑星系团 $\Omega_0(\text{cluster}) \approx 10\% - 30\%$

暗物质① 不发光的重子物质 原初核合成理论限制当今宇宙重子物质的质量密度 $2.3\% < \Omega_{b0} < 5.1\%$

② 非重子暗物质: 有静质量的非重子粒子, 活跃于极高温的极早期宇宙并随温度下降而退耦

中微子 (热暗物质——高速运动), 冷暗物质——低速运动

推导对 Ω_{b0} 的限制: $\Omega_{b0} \equiv \frac{\rho_{b0}}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{b0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} n_{b0} m_{\text{核}}$ $\rho_{b0} = n_{b0} m_{\text{核}}$

$$\frac{n_{b0}}{n_{\gamma 0}} = \eta \quad \Omega_{b0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} n_{\gamma 0} \eta m_{\text{核}}$$

微扰背景辐射公式 $du = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} (e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1)^{-1} d\lambda$ ($\lambda, \lambda+d\lambda$ 范围内每个光子能量 $E = \frac{hc}{\lambda}$)

$$dn_{\gamma} = \frac{du}{E} = \frac{8\pi}{\lambda^4} (e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1)^{-1} d\lambda$$

包含各个波长的光子在内的数密度 $n_{\gamma} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi}{\lambda^4} (e^{\frac{hc}{k_B T \lambda}} - 1)^{-1} d\lambda = 2 \times 10^7 T^3 / \text{m}^3$

$$T \approx 2.728 \text{ K} \quad n_{\gamma 0} \approx 4.1 \times 10^8 \text{ m}^{-3} \quad H_0 = 3.2 \times 10^{-10} \text{ h} \quad (0.5 < h < 0.7) \quad 3.4 \times 10^{10} < \eta < 5 \times 10^5$$

$$\Rightarrow \Omega_{b0} h^2 = 3.7 \times 10^7 \eta \quad \text{即} \quad 2.3\% < \Omega_{b0} < 5.1\%$$

$\Omega_0(\text{cluster}) \approx 10\% \sim 30\%$ 代表宇宙中所有物质 (可视物体与暗物质) 贡献 $\Rightarrow$ 宇宙远非封闭

1981 年提出的暴胀模型 (inflation) 认为 $\Omega_0 \approx 1$

1998 年前 协调 $\Omega_0 \approx 1$ 与 $\Omega_0(\text{cluster}) \approx 10\% \sim 30\%$: 约 80% 的物质不成团地分布于宇宙中

1998 年 测量宇宙常数 Λ 值取得进展: 从含 Λ 项的爱因斯坦方程讨论宇宙学问题

$$\Omega_0 = \underbrace{\Omega_{m0}}_{30\%} (\gg \Omega_{r0}) + \underbrace{\Omega_{\Lambda}}_{70\%} (\text{宇宙常数 } \Lambda > 0 \text{ 贡献})$$

10.3.3 宇宙学常数问题 The cosmological constant problem.

1917年 爱因斯坦引入宇宙常数项 Λ 构造静态宇宙模型 1923年放弃

20世纪30年代 哈勃对 H_0 早期测量结果严重偏大 $\Lambda > 0$ 使过大的 H_0 不导致过小的宇宙年龄。

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \rightarrow G_{ab} = 8\pi (T_{ab} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab})$$

$$(T_{ab})_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab} \quad \text{特殊理想流体} \quad -\rho = p = -\frac{\Lambda}{8\pi}$$

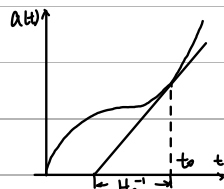
$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + p g_{ab} \quad \text{"负压强"}$$

$$\text{Friedmann 方程} \quad 3 \frac{\dot{a}^2 + k^2}{a^2} = 8\pi\rho \quad 2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k^2}{a^2} = -8\pi p \Rightarrow 3\ddot{a} = -4\pi a(\rho + 3p)$$

$$\text{仅考虑宇宙常数项 } \Lambda \text{ 对 } \rho, p \text{ 的贡献} \quad 3\ddot{a} = -4\pi a(3p) = -a\Lambda \quad \Lambda > 0 \quad \ddot{a} > 0$$

正宇宙常数项使宇宙加速膨胀, 起斥力作用

$\left\{ \begin{array}{ll} \text{早期宇宙, 物质能量密度 } \rho \text{ 较大} & \text{引力} > \text{斥力} \quad \text{减速膨胀} \\ \rho \text{ 随宇宙不断膨胀而减小} & \text{引力} = \text{斥力} \quad \text{匀速膨胀} \\ \rho \text{ 减小} & \text{引力} < \text{斥力} \quad \text{加速膨胀} \end{array} \right.$



$\Rightarrow H_0^{-1} < t_0$ 缓解宇宙年龄矛盾

20世纪50年代末 ① H_0 新测量值为哈勃测值的 $\frac{1}{8}$ ② 近代恒星理论建立减小恒星年龄估计值
至近代物理发现“真空不空”: 真空中各种场的真空涨落 (虚的正反粒子对不断产生与湮灭)

由量子场论处于真空态的场仍有很大的能量密度 - 真空能量密度 ρ_{vac} (vacuum energy density)

一真空态定义为量子场的基态, 是能量取最低值 (非零) 的状态 $\rho_{vac} = -p_{vac}$

由基态, 洛伦兹不变性 (没有一个特殊的观者族, 无法指定 u^a) $(T_{ab})_{vac} = -\rho_{vac} g_{ab}$

形式上类似于宇宙常数项 Λ 的贡献 $(T_{ab})_{\Lambda} = -\frac{\Lambda}{8\pi} g_{ab} \quad \Lambda \leftrightarrow 8\pi\rho$

不涉及引力的物理学: ρ_{vac} 无可观测效应, 仅考虑能量差而真空为测量基准。

涉及引力的物理学: 所有能量密度都是时空弯曲的根源

ρ_{vac} 的量级: 理论预测 $\rho_{vac} \sim \frac{E_p^4}{16\pi\hbar^2 c^2} \sim 10^{94} \text{ kg m}^{-3}$ 大测量 Λ 为其 10^{10} 倍

可能的补救方法: 爱因斯坦场方程在考虑 ρ_{vac} 的贡献前已存在一个裸宇宙常数 Λ_{bare}

与 $8\pi\rho_{vac}$ 相抵消 $\leftrightarrow \rho_{vac}$ 的组成非常复杂, 裸 Λ 抵消过于凑巧

物理学家的宇宙常数问题: ρ_{vac} 与 Λ 量级相差太大

天文学家的宇宙常数问题: 观测确定非零的 Λ 项是否存在.

Λ 的存在对宇宙演化的影响 $G_{ab} = 8\pi(T_{ab} - \frac{\Lambda}{8\pi}g_{ab})$

Friedmann 方程 $3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho + \Lambda$

$$H^2 = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}$$

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = -8\pi p + \Lambda$$

$$1 = \frac{8\pi\rho}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{a^2 H^2}$$

临界密度 $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi} \quad (k=0)$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{8\pi\rho}{3H^2}$$

讨论当今时刻 t_0 情况: $\rho_0 \cong \rho_{m_0}$ (辐射贡献可忽略) $\Omega_0 \cong \Omega_{m_0}$

$$1 = \Omega_{m_0} + \Omega_{\Lambda_0} - \frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad k=0 \text{ 空间曲率贡献为 } 0 \Rightarrow \text{要求存在非零的 } \Omega_{\Lambda}$$

定义减速变量 (deceleration parameter): 对减速度 $-\ddot{a}$ 做无量纲化处理

$$q := -\frac{a}{\ddot{a}} \ddot{a}$$

$$q_0 := -\left(\frac{a}{\ddot{a}} \ddot{a}\right)_{t_0} \text{ [当今值]}$$

$$q = -\frac{a}{\ddot{a}} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{H^2} \frac{\ddot{a}}{a}$$

当今宇宙物质主导 ($p=0$)

$$2 \frac{\ddot{a}}{a} = \Lambda - \left(\frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3}\right) = \frac{2\Lambda}{3} - \frac{8\pi\rho}{3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{1}{3}\Lambda - \frac{4\pi\rho}{3}$$

$$q = -\frac{1}{H^2} \left(\frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi\rho}{3}\right) = \frac{4\pi\rho}{3H^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} \quad \text{即} \quad q_0 = \frac{4\pi\rho_0}{3H_0^2} - \frac{\Lambda}{3H_0^2} = \frac{1}{2}\Omega_{m_0} - \Omega_{\Lambda}$$

$-\Omega_{m_0}$ 导致减速, 正 Ω_{Λ} 导致加速

直接测量减速变量 q_0 : 测量对象是对演化不敏感的距离指示物

- Ia 型超新星 (type Ia supernova)

1998 年 Riess, Perlmutter 观测结果显示

宇宙常数非零且为正 ($\Lambda > 0$) 因当今宇宙正在加速膨胀 ($\Omega_{\Lambda} > \frac{1}{2}\Omega_{m_0} \Rightarrow q_0 < 0$)

观测减速参数 q_0 与 CMB 非各向同性度结果得出 $\Omega_{m_0} = 0.25^{+0.18}_{-0.12} \quad \Omega_{\Lambda_0} = 0.63^{+0.17}_{-0.13}$

故 $\Omega_{m0} + \Omega_{\Lambda 0} \approx 1$ 因而 $k=0$ 当今宇宙接近平直.

因 $\Omega_{\Lambda 0}$ 占主导地位, 为总体的 70% 左右.

宇宙模型由冷暗物质 CDM 模型 ($\Omega_{m0}=1$) 至 Λ CDM 模型 ($\Omega_{m0} \approx 0.3, \Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$)

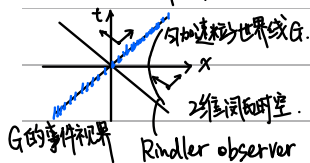
Note: Λ 为一个大的宇宙常数, 但 $\Lambda/8\pi\rho_{vac} \sim 10^{-120}$ Λ 极小但非零

— 解决天文学问题, 但物理学问题仍然存在.

§10.4 标准模型的疑难和克服 Finding a way out of difficulties of the standard model

10.4.1 粒子视界 particle horizons

event horizon



事件视界: 划分时空中能被看得见的事件和不能被看见的事件

任一时刻事件发出的光信号与观者世界线 G 相交

事件视界依赖于观者的选择

考虑各向同性观者 G (粒子) 及其世界线上一点 P . 注: 大爆炸奇点并非只有一个点

是否存在粒子任时刻所发的光信号都不与 G 交于 P ? ($k=0$ 情况) 因果失联系问题

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) = a^2(t)[-d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2] \text{ 其中 } d\tilde{t} = a^{-1}(t)dt \Rightarrow \tilde{t} = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$$

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{1/2} & \text{辐射主导} \\ t^{2/3} & \text{物质主导} \end{cases} \Rightarrow \tilde{t}(t) = \begin{cases} t^{1/2} \\ t^{2/3} \end{cases} \quad \tilde{t}(0) = 0$$

$$\tilde{g}_{ab} \equiv \Omega^2 g_{ab}$$

FLRW 度规 $g_{ab} = a^2 \gamma_{ab}$ 为共形平直度规

[共形变换 (conformal transformation) $\Omega^2: g_{ab} \mapsto \tilde{g}_{ab}$]

(两度规相差一个处处为正的共形因子, 即两者有共形联系 + γ_{ab} 为平直度规)

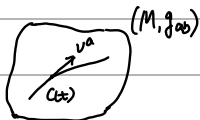
故任一矢量 v^a 用 g_{ab} 衡量是类时的/类空的/类光的 $g_{ab}v^av^b < 0 / > 0 / = 0$

$\Leftrightarrow$ 用 γ_{ab} 衡量是类时的/类空的/类光的

一条类光曲线用 g_{ab} 衡量是测地线 $\Leftrightarrow$ 用 γ_{ab} 衡量是测地线

共形变换保持矢量的类时性, 类空性, 类光性, 仅保持类光曲线的测地性.

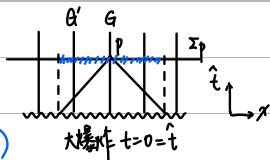
因果关系 (causal relation) 不变.



闵氏时空的惯性坐标时间 $t \in (-\infty, +\infty)$ $k=0$ FLRW 时空 $\hat{t} \in (0, +\infty)$ - 宇宙时间

设 Σ_P 为过事件 P 的均匀面，被分为可被 G 在 t_P 时看到的粒子

与不能被看到的粒子组成的两个子集，分界面为



观察者 G 在时刻 t_P 的粒子视界 (particle horizon)

粒子视界需要给定一族类时线汇作为粒子。

依赖于观察者 G 及其世界线上一点 P 的选取



视界(固有)半径 / 视界距离 $D_H(t_P)$: 时刻 t_P 的粒子视界上任一点与 P 的距离。

$$D_H(t_P) = a(t_P) \int_0^{t_P} \frac{dt}{a(t)} = \begin{cases} 2ct & \text{辐射宇宙} \\ 3ct & \text{物质宇宙} \end{cases}$$

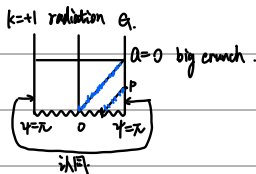
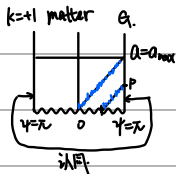
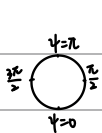
$k=-1$

FLRW 度规共形平直。

物质宇宙膨胀至最大时粒子视界消失

$k=+1$

辐射宇宙从大爆炸至大挤压都有粒子视界。



10.4.2 标准模型的疑难. Difficulties of the standard model

(极早期宇宙 $t < 1s$).

□ 视界疑难 (horizon problem) / 均匀性疑难.

观测 CMBR $\Rightarrow$ 光子退耦时 $t_{rd} \sim 10^3 s$ 宇宙已经均匀和各向同性

解释: 各种粒子频繁相互作用充分搅拌 $\longleftrightarrow$ 存在粒子视界

G_{obs} P $D_H(t_0)$ G $t=t_0$ 当今可观测宇宙 (the presently observable universe)

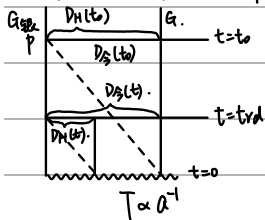
$D_H(t_0)$ 为当今可观测宇宙的当今大小 $D_{\hat{D}}(t_0)$

$$D_{\hat{D}}(t_0) = D_H(t_0) = 3ct_0 = 3 \times (3 \times 10^8) \times (3 \times 10^7) \approx 3 \times 10^{26} m.$$

$$\frac{D_{\hat{D}}(t_{rd})}{D_{\hat{D}}(t_0)} = \frac{a(t_{rd})}{a(t_0)} = \frac{T_V(t_0)}{T_V(t_{rd})} = \frac{2.73 K}{4000 K}$$

$$D_{\hat{D}}(t_{rd}) \approx 2 \times 10^{23} m.$$

$$D_H(t_{rd}) = 2ct_{rd} = 2 \times (3 \times 10^8) \times 10^3 = 6 \times 10^{21} m$$



⇒ 当今可观测宇宙在光子退耦时的半径 $D_0(t_{ra})$ 约为当时视界距离 $D_H(t_{ra})$ 的33倍。

粒子视界定义 → 某一时刻的空间中距离大于 D_H 的粒子之间必定不曾有过相互作用。

任一粒子所发的任何信号在此时刻之前都不能到达另一粒子

由于 $D_H(t) = \begin{cases} 2ct & \text{辐射宇宙} \\ \propto t^{1/2} & \text{物质宇宙} \end{cases}$ $D_0(t) \propto a(t) = \begin{cases} t^{1/2} \\ t^{2/3} \end{cases}$ $D_H(t_0) = D_0(t_0)$

所以 $D_0(t) > D_H(t)$ 不成立 → 早期宇宙越严重 ⇒ 当今可观测宇宙在早期根本不可能充分搅拌。

例如 $t = 10^{-43} \text{ s}$ $T(10^{-43} \text{ s}) \cong 3 \times 10^{31} \text{ K}$ $D_0(10^{-43} \text{ s})$ 为 $D_H(10^{-43} \text{ s})$ 的 10^{-2} 倍。

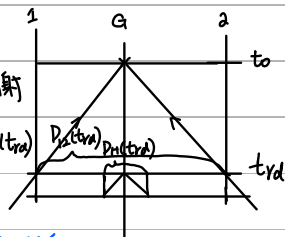
另一等效描述 — 均匀性疑难：

观者 G 在 t_0 时刻接收到光子退耦时刻 t_{ra} 两地 (微扰源 1, 2) 发出的辐射

$D_{12}(t_{ra})$ 为 t_{ra} 时刻源 1, 2 之间的固有距离, $D_H(t_{ra})$ 为视界距离 $\sim \frac{1}{\sqrt{3}} D_0(t_{ra})$

— 宇宙在 t_{ra} 时刻至少在 $D_{12}(t_{ra})$ 尺度内是均匀的
— 源 1 和 2 之间不可能在 t_{ra} 之前有热接触

温度相同 / 长程均匀性难以解释。



Note: 已观测到的宇宙 (the observed universe) 大小为 D_0

星系距离地球越远, 星系发出的光红移越大 近似 $z = U$ 该星系的退行速率. $U = H_0 D_0$

$D_0 = z H_0^{-1}$ 量级为 10^{26} m H_0^{-1} 为哈勃长度 (Hubble length)

因平直性疑难 (flatness problem) 空间平直 $k=0, \Omega=1$. 随着宇宙膨胀 Ω 值与 1 的偏离愈发严重

衡量宇宙对平直情况的偏离程度 $\epsilon(t) = |1 - \frac{1}{\Omega(t)}| = |1 - \frac{\rho_0}{\rho}| = |\frac{\rho - \rho_0}{\rho}| = \frac{3H^2}{8\pi a^2 \rho(t)}$

$\epsilon \propto (\rho a^3)^{-1} = \begin{cases} (P a^3)^{-1} a^3 \propto a^2 & \text{辐射宇宙} \\ (P a^3)^{-1} a \propto a & \text{物质宇宙} \end{cases}$ $a(t) \uparrow \epsilon(t) \uparrow$ $a(t_0) \cong \frac{T(10^{-43} \text{ s})}{T(t_0)} a(10^{-43} \text{ s}) = 10^{31} a(10^{-43} \text{ s})$

⇒ $\epsilon(t_0) \cong 10^{60} \times \epsilon(10^{-43} \text{ s})$ 宇宙膨胀对 ϵ 值有惊人的放大作用

$\Omega(t_0) > 0.1$ 量级为 1, $\epsilon(t_0) < 10 \Rightarrow \epsilon(10^{-43} \text{ s}) \cong 10^{-51}$

$\Omega(10^{-43} \text{ s}) \cong (1 \pm 10^{-51})^{-1} \cong 1 \pm 10^{-51}$

↗ Ω 略大 未演化至今膨胀为大挤压奇点
↘ Ω 略小 膨胀过快而无法形成星系

⇒ 在 10^{-43} s 时的 Ω 值必须被精确地“微调”至与 1 如此接近, 使至今 Ω 的量级为 1。

微调疑难 (fine-tuning problem) 的另一等效描述 — 火筒疑难: 特征熵 (a^3) $S > 10^{87}$

正反物质不对称性, 适当的密度涨落谱 $\delta\rho/\rho$ 产生宇宙结构

[初始条件问题]

10.4.3 暴胀模型及其对视界、平坦性疑难的解决 Solving the problems by inflationary model

粒子物理大统一模型预言重子数不守恒性 $\Rightarrow$ 正反物质不对称性问题 + 宇宙学标准模型.

宇宙学问题——磁单极疑难:

极早期宇宙产生过特殊的非相对论性粒子, 其中一种叫磁单极子 (magnetic monopole)

密度随宇宙膨胀减小但对 Ω_0 的贡献仍比 Ω_0 观测值高 10^{11} 量级

$\Rightarrow$ 1981年 Guth 提出暴胀模型 解决标准模型的视界疑难及平坦性疑难, 缓解磁单极疑难.

由大统一模型 高能情况下 (高于 $T_c \approx 10^{16} \text{ GeV}$) 电磁、强相互作用统一, 具有内部对称性

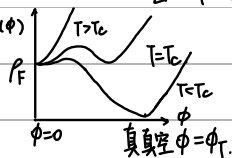
$T < T_c$ 内部对称性自发破缺 强相互作用与电磁相互作用表现出不同 $T_c \approx 10^{16} \text{ GeV}$ 为大统一-临界温度

$T = T_{em} = 10^2 \text{ GeV} = 10^{15} \text{ K}$ 电磁相互作用与弱相互作用表现出不同

Higgs 场 ϕ (标量场) 与传递弱作用的中间玻色子 W^+, W^-, Z^0 都有耦合使其获得质量 $W^\pm$ 80 GeV Z^0 90 GeV

有效势 $V(\phi)$ 可解释为能量密度. 适当选择 SU(5) 大统一模型自由参数

真空定义为能量最小的状态.



① $T > T_c$ 真空态在 $\phi=0$ ② $T = T_c$ 有两个极小值, 其中一个在 $\phi=0$

③ $T < T_c$ 有两个极小值, 其中一个在 $\phi=0$ 为假真空 (false vacuum) 态.

$V(\phi_1) < V(0)$ 另一个在 $\phi=\phi_1$ 为真真空 (true vacuum) 态.

暴胀模型对初始条件要求很低 宇宙在暴胀模型后的表现对初始条件的细节很不敏感

主要要求: 极早期宇宙中含有某些温度高于 T_c 的区域 ϕ 场处于真空态 $\phi=0$

区域不断膨胀 T 降低至 T_c 及其以下 $V(\phi)$ 有两个极小值. ϕ 场从 T_c 起进入假真空态 [能量高于真真空态, 为亚稳态]

ϕ 场通过量子隧穿效应穿越 $V(\phi)$ 曲线中的势垒至真真空态. —— 所谓相变 对称相 $\phi=0 \rightarrow$ 对称破缺相 $\phi=\phi_1$.

相变产生得非常缓慢: $T < T_c$ ϕ 场在假真空态滞留一段时间才通过相变进入真真空态. [过冷]

(选择大统一模型参数) 过冷到接近 $T=0$ 仍处于假真空态, 过冷阶段进行暴胀.

相变前 假真空态 $\rho_F \approx 10^{76} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 相变后 到达 $T \approx 0$ 的真真空态 $V(\phi) \approx 0$ 释放相变潜热

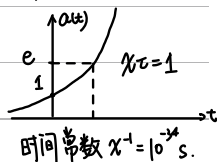
当今宇宙中处在 $T \approx 0$ $V(\phi)$ 曲线真真空态 $\phi = \phi_T$ 附近微小涨落 $P_T \approx \Lambda$

考虑过冷情况下尺度因子 $a(t)$ 的演化 $3 \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho$ $\rho \equiv \rho_F = \text{常数}$ $P = -\rho$ $k \approx 0$ (a 很小)

$$\frac{\dot{a}}{a} = \left(\frac{1}{3} 8\pi G \rho_F\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \mathcal{H} \quad \frac{d \ln a}{dt} = \mathcal{H} \quad a(t) \propto e^{\mathcal{H}t}$$

$a(t)$ 随 t 按指数规律以极小的时间常数 $\mathcal{H}^{-1}$ 急剧增长 — 暴胀 (inflation)

假真空对应于压强为负的理想流体 $\ddot{a} = -\frac{4\pi a}{3}(\rho + 3p) > 0$ 加速膨胀.



负压强排斥作用 > 能量密度的吸引作用 $\Rightarrow$ 斥力

暴胀始于 $t_c \approx 10^{-34}$ s (大统一临界温度 $T_c = \frac{10^{16}}{\sqrt{t_c}} = 10^{27}$ K). $T < T_c$ 过冷

终于 $t_f \approx 10^{-32}$ s 暴胀阶段未发生对称性破缺的相变

经历过暴胀的区域中场先后从假真空态转入真真空态. 处于真真空态的区域称为一个泡 (bubble).

$\Rightarrow$ 再加热 (reheating) 能量分配给各类粒子, 温度升至 T_c , 状态保持在真真空态

$\Rightarrow$ 标准宇宙模型演化 [两者并不矛盾]

暴胀模型对标准模型的疑难克服.

① 视界疑难: 当今可观测宇宙的早期尺度远大于视界范围

$$t_p = 10^{-43} \text{ s} \quad D_H(t_p) \approx 10^{-26} \text{ m} = 10^{-51} \text{ m} \quad \text{加入 } t_c \text{ 至 } t_f \text{ 的暴胀阶段 } D_H(t_p) \text{ 不变 } D_S(t_p) \text{ 急剧减小}$$

$$D_S(t_p) \propto a(t_p) \quad \text{令暴胀使尺度因子增大 } Z \text{ 倍} \quad Z = e^{\mathcal{H}(t_f - t_c)} \quad \mathcal{H} = 10^{34} \text{ s}^{-1} \quad t_f - t_c \approx 10^{-32} \text{ s}$$

$$Z \approx e^{100} \approx 10^{43} \gg 10^{51} \quad \text{暴胀前 } D_S \ll D_H \quad \text{当今可观测宇宙仅是视界范围内的一个区域}$$

视界内各点有因果联系, 可以产生充分的相互作用使区域在暴胀前已经达到均匀和各向同性

区域 $\xrightarrow{\text{暴胀阶段}}$ 急速变大 $\xrightarrow{\text{标准模型}}$ 膨胀 $\Rightarrow$ 今天的可观测宇宙.

② 平坦性疑难: $\varepsilon = (p/a^2)^{-1} = \begin{cases} (p/r^2)^{-1} a^2 \propto a^2 & \text{辐射} \\ (p/a^2)^{-1} a \propto a & \text{物质} \\ (p/a^2)^{-1} \propto a^2 & \text{真空} \end{cases}$ Ω 与 1 的偏离程度 $\varepsilon(t)$ 按 a 被迅速放大 $\varepsilon(t_p) \xrightarrow{\text{放大 } 10^{40}} \varepsilon(t_0)$ 量级为 1

只要 $\Omega[\varepsilon]$ 不是离奇地大, $\varepsilon(t_0)$ 必定非常接近于 0, $\Omega(t_0) \approx 1 \pm \mathcal{O}(10^{-60})$

预测“宇宙今天的空间几何非常接近平直”

• Guth 暴涨模型的问题: 优雅退出问题 (graceful exit problem).

1983年 Linde 混沌暴涨模型 (chaotic inflation model) 解决以上所有疑难且有独特优点

• 暴涨模型的天文学观测证据:

① Λ CDM 带有的冷暗物质结构形成模型 $\Omega_{m0} \approx 0.3$ $\Omega_{b0} \approx 0.04$ 符合预言 $\Omega_0 \approx 1$.

+ 暴涨给出 Λ CDM 所需的原初扰动谱

② 1996年 微波背景辐射的非各向同性性存在支持 $\Omega_0 \approx 1$ 的有力证据

③ 1998年 高红移 Ia 类超新星的观测表明当今宇宙正在加速膨胀

§10.5 暗物质和“新标准宇宙模型” Dark energy & the “New Standard Model”

10.5.1 暗能量问题 The dark energy problem.

1998年 超新星的观测表明当今宇宙正在加速膨胀 加速膨胀的形成机制——暗能量问题

暗能量: 导致宇宙加速的宇宙内容物

由广义相对论爱因斯坦方程: 能量密度 ρ 和压强 p 对引力有贡献

$p < 0$ 且 $|p|$ 与 ρ 可比拟时产生斥力效应.

具有以下3个特征的“理想流体”都可充当暗能量候选者: 区别于暗物质 ($p \approx 0$)

① 不发光 ② 压强 p 和能量密度 ρ 满足 $p \sim -\rho$ (对于 Λ : $p = -\rho$)

③ 空间分布近似均匀 [至少在星系团的尺度上不表现出集聚现象, 暗能量的发现基于宇宙尺度]

暗能量存在的依据:

① 当今宇宙加速膨胀 ② 宇宙微波背景辐射的非各向同性性反映出宇宙是空间平坦的 ($k \approx 0, \Omega \approx 1$)

③ 不依赖于质量-长度关系的物理观测对 Ω_0 贡献 $\Omega_{m0} \approx 0.33$ 其余 70% 可能为暗能量

真空能量(正宇宙常数) Λ 作为暗能量第一候选者的严重疑难:

① 宇宙常数问题: 非零的宇宙常数 Λ 运行于粒子物理的理论值.

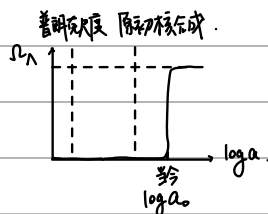
② 巧合性问题 (coincidence problem): $\rho_M \propto a^{-3}$ $\rho_R \propto a^{-4}$ $\rho_\Lambda = \text{const}$

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_M} \propto a^3 \quad \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_R} = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \propto a^4 \quad \text{早期宇宙 } \Omega_R, \Omega_M \text{ 主导, 晚期宇宙 } \Omega_\Lambda \text{ 主导.}$$

Peebles, Carroll, Turner 设 $\Omega_{R0} = 0.7$ $\Omega_{M0} = 0.3$ $\Omega_R = 5 \times 10^{-5}$

Ω_Λ 在早期近似为 0, 在晚期近似为 1, 变化极慢.

极短时间内 Ω_Λ 从 0 猛增至 1 当今宇宙正处在这急速转变时段中.



等效描述: 宇宙的微调困难. (fine-tuning problem)

$$\frac{\Omega_{R0}}{\Omega_{M0} + \Omega_{R0}} = \frac{7}{3} \Rightarrow \text{极早期宇宙 } \frac{\rho_\Lambda}{\rho_R} \sim 10^{-100} \text{ 极小}$$

对极早期宇宙初始条件必须做极精密的微调 使 $\rho_{\Lambda 0} / \rho_{M 0} \sim 1$.

⇒ 动力学暗能量 (dynamical dark energy) 随时间缓慢地进行动力学演化.

其中一种为 quintessence 理论 (第3原假) — 极早期宇宙暴胀中的标量场 ϕ 在暴胀后仍有影响

$$\phi \text{ 的能量密度 } \rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad \text{压强 } p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$$

ϕ 场变化的多慢 $\dot{\phi} \ll V(\phi)$ 则 $p_\phi \approx -\rho_\phi$ 在暴胀期间近似等价于正宇宙常数

暴胀结束时 ϕ 场能量大部分转化为重子 $\rho_\phi < \rho_M \xrightarrow{a \uparrow} \rho_\phi > \rho_M$.

选择适当的 $V(\phi)$ 函数形式 $\Rightarrow \rho_\phi$ 随 a 缓慢减小, 超过 ρ_M

$\Rightarrow \rho_\phi(z)$ 曲线在现今 ($z=0$) 的表现与早期 (z 很大) 的初值无关

解决微调疑难.

Note: 基本粒子 — 夸克, 轻子, 中间玻色子, 非重暗物质, ϕ 场

暗物质 + 暗能量 $\Rightarrow$ 暗分量 quintessence 理论 (第4原假).

若宇宙尺度上广义相对论 [爱因斯坦方程] 失效, 则应寻找新理论/解释

① 小尺度下等效于广义相对论 ② 符合对宇宙的各种观测数据.

10.5.2 新标准宇宙模型. The New Standard Model

新标准宇宙模型至少具有以下特点:

1) 宇宙在空间上平直 $\Omega_0 \approx 1$, 宇宙正在加速膨胀 $\dot{\rho}_0 < 0$

2) 极早期宇宙存在暴涨阶段 } 解释原标准宇宙模型疑难. 提供所需的原初扰动[种子].
期间由量与涨落造成的密度不均匀性为冷暗物质结构形成理论

1) 当今宇宙内容物 { 暗能量 70% 暗物质 30%. (大多数为冷暗物质)
发光物质 0.5% 物态方程 $w \equiv \frac{p}{\rho} = \begin{cases} < -\frac{1}{3} / -1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$
辐射 0.005%

10.5.3 宇宙的命运 The destiny of our universe

原标准宇宙模型: 宇宙在 t_0 之后的演化方式只取决于空间几何

新标准宇宙模型: 宇宙命运非常复杂 $\Omega_0 = 1$ 宇宙中

① 暗能量是宇宙常数 $\Lambda > 0$ $\Omega_m \ll \Omega_\Lambda$ 宇宙接近指数式膨胀 (de Sitter 宇宙) 直至永远

② 暗能量是动力学暗能量 随时间减弱使 $\Omega_m \gg \Omega_\Lambda$ 宇宙以物质主导减速膨胀, 直至永远

③ 暗能量是动力学暗能量 演化为 $p < 0$, $p > 0$ (类似为负宇宙常数) 宇宙从膨胀转为收缩

④ 有限时间 t , $a(t)$ 无限大 [Big Rip].

10.5.4 "黑暗物理学"的光明前途 The bright future of dark physics

基础物理学正在受以暗能量为代表的严重疑难挑战 $\Rightarrow$ 新物理突破.

1. 观测: 天文学家 高精度、大数量研究高红移 Ia 型超新星, 追溯宇宙膨胀历史.

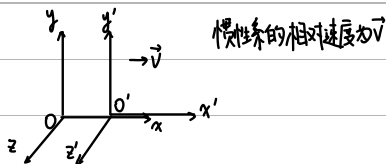
测定暗能量物态方程 $w \equiv \frac{p}{\rho}$ 及其随时间演化以区分暗能量模型. $\ddot{a} > 0 \Leftrightarrow \rho + 3p < 0 \Leftrightarrow w < -\frac{1}{3}$

2. 理论: 理论物理学家和大体物理学家 暗能量理论研究.

高等狭义相对论

专题一 狭义相对论提要

§1.1 同时性的相对性



伽利略变换 $x' = x - vt$ $y' = y$ $z' = z$ $t' = t$

$$u_x = \frac{dx(t)}{dt} \quad u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'} = u_x - v$$

1873年 麦克斯韦方程组 (允许波动解 $\Rightarrow$ 电磁波, 光速恒为光速 c) 不满足惯性系坐标之间的伽利略变换.

$\Rightarrow$ 修改伽利略变换 $t \rightarrow t'$

考虑行驶的列车系与静止的地面系.

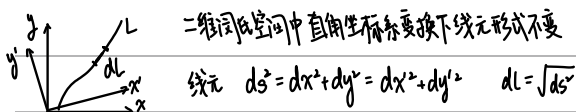


狭义相对性原理 + 光速不变原理 $\Rightarrow$ 洛伦兹变换 $\gamma \equiv (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \beta \equiv \frac{v}{c}$

$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x)$ $x' = \gamma(x - vt)$ $y' = y$ $z' = z$ $v \ll c$ 时近似为伽利略变换.

引入自然单位制 $c=1$ $\{t, x\} \rightarrow \{t', x'\}$ 洛伦兹变换有 $t' = \gamma(t - vx)$ $x' = \gamma(x - vt)$

§1.2 几何语言初步 [线元几何]

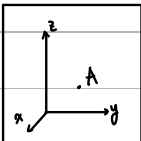
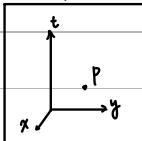


线元 $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2 \quad dl = \sqrt{ds^2}$

地面系为 $\{t, x\}$, 列车系为 $\{t', x'\}$ 对于两个事件分别有 $p_1 = (t_1, x_1) = (t'_1, x'_1)$ $p_2 = (t_2, x_2) = (t'_2, x'_2)$

$dt = t_2 - t_1$, $dx = x_2 - x_1$, $dt' = t'_2 - t'_1$, $dx' = x'_2 - x'_1$ 有 $dt' = \gamma(dt - vdx)$ $dx' = \gamma(dx - vdt)$

得出 $-dt^2 + dx^2 = -dt'^2 + dx'^2$ 间隔时空的间隔 $ds^2 = -dt^2 + dx^2$ 在惯性系坐标变换下形式不变

闵氏时空中元线段长 $dl = \sqrt{ds^2}$	$\begin{cases} ds^2 = 0 & \text{类光} \\ ds^2 > 0 & \text{类空} \\ ds^2 < 0 & \text{类时} \end{cases}$	欧氏空间 	闵氏时空 	空间点 $A = (x, y, z)$ 时空点 $P = (t, x, y)$ [伪几何]
------------------------------	--	--	--	---

球面几何 $ds^2 = dx^2 + \sin^2 x dy^2$

即 $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ 在 $r=1$ 时导出的线元



三维欧氏空间中嵌入一个二维球面 S^2

· 曲率张量 / 黎曼张量 / 4-曲率 [线元决定曲率]

平直时空：时空中每一点的曲率均为零，反之则为弯曲时空（广义相对论时空背景）

e.g. 欧氏空间是平直空间，闵氏时空是平直时空（狭义相对论时空背景），球面是弯曲空间

· 测地线

欧氏空间直角坐标系 $\{x, y, z\} \Leftrightarrow$ 线元可以写为 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (线性关系) $\Rightarrow$ 定义直线

闵氏时空惯性坐标系 $\{t, x, y, z\} \Leftrightarrow$ 线元可以写为 $ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ (线性关系) $\Rightarrow$ 定义直线

直线在非欧几何中的推广称为测地线，由线元决定 e.g. 球面上的测地线 $\Leftrightarrow$ 大圆弧

一个时空点 + 一个点上的矢量作为切矢 $\Rightarrow$ 确定一条测地线 [点-矢量-测]

§1.3 几何语言描述狭义相对论

两类粒子：质点 $u < 1$ 和光子 $u = 1$ 全部的历史事件集合被称为世界线（时图）

例1:  沿x轴正向以光速c匀速直线运动 — 光子

 类时曲线 — 质点运动

 类空曲线 — 不代表粒子世界线（超光速）

3维图的信息一般少于4维图

例2: 爱因斯坦列车 以地面系为基准.



地面系在O点同时收到a, b发出的光

列车系在O₁收到a点的光, O₂点收到b点的光, 不同时

· 标准钟与固有时

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \text{类时曲线 } \tau_2 - \tau_1 = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{ds^2}$$























